UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DA PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*
MESTRADO EM FILOSOFIA

MARTHA KAERCHER

TEORIA DA REFERÊNCIA E SEMÂNTICA DE KRIPKE: UMA RELAÇÃO ENTRE LINGUAGEM E LÓGICA

RECIFE
2022

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

COORDENAÇÃO DA PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*

MESTRADO EM FILOSOFIA

MARTHA KAERCHER

TEORIA DA REFERÊNCIA E SEMÂNTICA DE KRIPKE: UMA RELAÇÃO ENTRE LINGUAGEM E LÓGICA

Dissertação apresentada, para defesa pública, como requisito parcial para obtenção do título de mestre, no Programa de Pós-graduação - mestrado em Filosofia.

Linha de Pesquisa: Linguagem, Sentido e Ação

Orientadora: Profa. Dra. Eleonoura Enoque da Silva

RECIFE

2022

K11t Kaercher, Martha.
Teoria da referência e semântica de Kripke: uma relação entre linguagem e lógica / Martha Kaercher, 2022.
87 f.

Orientador: Eleonoura Enoque da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Católica de Pernambuco. Programa de Pós-graduação em Filosofia. Mestrado em Filosofia, 2022.

1. Semântica (Filosofia). 2. Referência (Filosofia). 3. Modalidade (Lógica). 4. Kripke, Saul A. I. Título.

CDU 161.26

Pollyanna Alves - CRB4/1002

MARTHA KAERCHER

TEORIA DA REFERÊNCIA E SEMÂNTICA DE KRIPKE: UMA RELAÇÃO ENTRE LINGUAGENS E LÓGICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Filosofia, pela Universidade Católica de Pernambuco, pela seguinte banca examinadora:

– UNICAP

Orientadora

Dr. José Marcos Gomes Luna — UNICAP

Examinador Interno

d s

Examinador Externo

RECIFE

2022

DEDICATÓRIA

A DEUS, "Porque DELE e por ELE e para ELE são todas as coisas; glória, pois, a ELE eternamente. Amém". (Romanos 11:36).

Aos meus pais (*in memoriam*) Dr. Rui Hugo Kaercher (UFPE) e Professora Dra. Elisabeth Gomes Kaercher (UFPE) em retribuição por toda uma vida caracterizada pelo amor, cuidado e ensino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeira instância a DEUS, o Eterno, o Criador e Sustentador de todas as coisas, o Princípio e o Fim, o Primeiro Motor, o EU SOU, Aquele que me dá o fôlego de vida, conhecimento, sabedoria, porque toda boa dádiva e todo dom perfeito vem do alto, descendo do Pai das luzes, em quem não há mudança nem sombra de variação. (Tiago 1:17).

Agradeço à minha orientadora professora Eleonoura Enoque da Silva, pelo seu olhar atento ao trabalho de pesquisa – desde a iniciação científica até o mestrado -, caracterizados pela compromissada dedicação, pelo incentivo, força, conhecimento ante aos novos desafios e pelas experiências vivenciadas.

Agradeço aos professores Daniel Durante (UFRN) e Ricardo Santos (Universidade de Lisboa - Portugal) pelas riquíssimas contribuições que nos foram ofertadas na banca de qualificação deste trabalho.

Em especial, agradeço ao professor José Marcos Gomes Luna, por estar sempre ao nosso lado nos presenteando com sua sabedoria, simpatia, mansidão e cordialidade.

Não poderia deixar de mencionar a minha gratidão aos professores André Luiz Holanda, Danilo Vaz-Curado Ribeiro, Delmar Araújo, Ermano Rodrigues, Gérson Francisco, José Tadeu, Karl-Heinz Efken e Ricardo Pinho, pela dedicação, empenho, criatividade que os fizeram superar os desafios e dificuldades de lecionar num contexto pandêmico.

Agradeço aos colegas de turma e a todos aqueles que compõem o quadro de funcionários da PPGFIL-UNICAP, por juntos caminharmos nesta inédita experiência de vida acadêmica remota.

E, por fim, agradeço à minha família, a maior riqueza deste mundo; e em especial à minha segunda mãe: Maria José Gomes Clemente, por todo carinho e apoio no decorrer desta jornada acadêmico-científica.

"A excelência nunca é um acidente. É sempre o resultado da alta intenção, esforço sincero, inteligência e execução, representa a escolha sábia entre muitas alternativas – a escolha, não o acaso, determina o seu destino."

Aristóteles

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar alguns elementos conceituais da teoria da referência causal de Kripke sob a perspectiva da lógica modal. O nosso problema consiste em estabelecer a relação entre os elementos da teoria da referência causal de Kripke e a sua semântica relacional. Para atingir o fito de tal investigação, utilizamos a obra *Naming and Necessity (1980)* de Saul Kripke, o seu artigo *A Completeness Theorem in Modal Logic* (1959) e a sua versão ampliada de 1963. A partir da obra, analisamos os elementos da teoria da referência, e a partir dos artigos apresentamos as definições, os teoremas, lemas e corolários necessários e constituintes para a semântica de Kripke. O que torna o nosso estudo relevante é o fato de explicitarmos as relações entre os conceitos da filosofia da linguagem apresentados na obra *Naming and Necessity*, tais como: nomes, designadores rígidos e relação de acessibilidade, com conceitos da estrutura de modelos normais de Kripke para lógica modal.

Palavras-chave: 1. Kripke; 2. Teoria da referência; 3. Semântica lógica modal.

ABSTRACT

The objective of this work is to investigate some conceptual elements of Kripke's theory of causal reference from the perspective of modal logic. Our problem is to establish a relationship between the elements of Kripke's theory of causal reference and its relational semantics. To achieve the aim of such investigation, we used Saul Kripke's work *Naming and Necessity* (1980), his article A Completeness Theorem in Modal Logic (1959) and its expanded version of 1963. From the work, we analyzed the elements of the theory from the reference, and from the articles we present definitions, theorems, theorems and corollaries and constituents for Kripke's semantics. What makes our study relevant is the fact that it is explicit as relations between the concepts of the philosophy of methodology presented in the work Naming and Necessity, such: names, rigid designators and accessibility relation, with structure concepts of normal Kripke models for logic modal.

Keywords: 1. Kripke; 2. Theory of reference; 3. Modal logic semantics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Num primeiro olhar, alguns leitores poderiam estranhar o caminho que escolhemos para fazer a abordagem do pensamento kripkeano desde fins da década de 50 até os dias atuais.

De certa forma, essa estranheza faz sentido, pois decidimos trazer primeiramente à luz a teoria da referência causal encontrada da obra *Naming and Necessity* de 1980, para depois abordar os outros dois artigos publicados em 1959 e o de 1963, fazendo, desta forma, uma inversão cronológica das suas publicações em nossa apresentação.

Por esta razão, cabe-nos aqui esclarecer os motivos que nos levaram a adotar essa inversão cronológica das publicações de Kripke em nossa dissertação.

Ao longo do nosso estudo, percebemos nos artigos de 1959 e de 1963, que Kripke fez uso de termos, porém, não os esclareceu conceitualmente, tais como "mundo possível", "mundo real" e "relação de acessibilidade". O autor somente traria esses esclarecimentos conceituais, anos depois, na sua obra *Naming and Necessity* (1980).[1]

Visando exatamente elucidar esta lacuna conceitual, procuramos, no capítulo 1, trazer primeiramente todo o arcabouço desses conceitos, para dar suporte a uma melhor compreensão da semântica de Kripke.

No presente estudo, dentre as muitas obras publicadas por Kripke nos deteremos apenas sobre três: o artigo de 1959, o de 1963, e a sua obra *Naming and Necessity* de 1980.

No artigo de 1959, publicado pelo *Journal of Symbolic Logic,* Kripke prova o teorema da completude para o sistema S5, proposicional e quantificacional. Neste, são apresentadas as definições acerca do sistema modal com a sua adequada linguagem, seus axiomas, regras de propriedades modais, os quais ele vai utilizar para alcançar o seu objetivo. No modelo, o autor determina a linguagem, o domínio do universo e a sua função de interpretação. Para isso, Kripke traz a ideia elementar que motivou todas estas definições, a saber, a modalidade da necessidade. Kripke diz: *"A proposição será necessária se e somente se ela é verdadeira em todos os mundos possíveis."*.

[1] Segundo Kripke: "It is not necessary for our present purposes to analyse the concept of a 'possyble worlds' any further". (KRIPKE, 1959, p. 02).

No artigo de 1963, Kripke estende os resultados do seu primeiro artigo para uma classe específica do cálculo proposicional modal, denominada “construção de modelos normais”.

Em seu livro de 1980, Kripke traz a discussão da sua tese da relação existente entre ‘o nomear’ e a ‘necessidade’, e expõe a sua teoria da referência causal, na qual explicita os conceitos de “mundo possível”, “designador rígido”, “relação de acessibilidade” e “identidade transmundo”.

Assim, estas foram as razões que nos fizeram trazer a inversão sequencial das publicações de Kripke, na medida em que lidamos com áreas interdisciplinares da filosofia, como: a filosofia da linguagem e a lógica.

O objetivo da nossa pesquisa é explicitar os elementos da teoria da referência causal de Kripke sob a perspectiva da lógica modal. Para isso, partimos do pressuposto de que filosofia da linguagem e lógica são duas áreas interligadas entre si, isto é, se comunicam de modo que uma torna a outra mais compreensível. Por isso, o problema que conduziu nosso estudo é saber se poderíamos afirmar que a teoria da referência causal de Kripke possuiria alguma relação com a noção que ele apresenta na estrutura de modelo normal, no âmbito do cálculo proposicional modal normal?

Acreditamos que sim; por este motivo, fomos conduzidos a investigar a possibilidade de encontrarmos elementos, no âmbito da filosofia da linguagem, da teoria da referência de Kripke, e tentarmos relacionar com a noção da estrutura de modelo normal, no âmbito da lógica modal. Sugerimos que, para uma melhor compreensão acerca da estrutura de modelo normal de Kripke, temos que conhecer previamente os conceitos da sua teoria da referência causal, e isto pela razão de existir uma relação entre as duas dimensões dos saberes: da filosofia da linguagem e da lógica.

Na investigação sobre essa relação entre a filosofia da linguagem e a lógica, é necessário primeiramente estudarmos os conceitos dos elementos da teoria da referência causal, tendo como fundamentação teórica a obra *O Nomear e a Necessidade* (2012), de Kripke. Em seguida, passaremos a apresentar as definições, os teoremas, os lemas e corolários encontrados no artigo sobre a análise semântica da lógica – o cálculo proposicional modal normal de Kripke (KRIPKE, 1963).

Em nosso capítulo primeiro, abordaremos os conceitos de cada elemento da teoria da referência causal, tal como encontramos na obra *O Nomear e a Necessidade* (2012) de Kripke.

Em nosso segundo capítulo, expomos a linguagem na qual se configura o cálculo proposicional modal, para que finalmente apresentemos as definições, teoremas, lemas, corolários essenciais para a construção da estrutura de modelo normal de Kripke. Por fim, em nosso terceiro capítulo, mostramos a relação entre a filosofia da linguagem sob a perspectiva da teoria da referência causal de Kripke, com a sua semântica criada para a lógica modal – a estrutura de modelo normal de Kripke.

No âmbito da filosofia da linguagem, Kripke é um dos maiores filósofos da contemporaneidade. Tem sido alvo de enorme debate entre a tradição filosófica e a escola moderna de filosofia por provocar infindas discussões acaloradas no meio acadêmico. De fato, a sua teoria abalou profundamente os alicerces da tradição filosófica. Não só isso; Kripke também é um gigante da lógica, desde cedo estudando e fazendo publicações acerca da lógica modal, criador de um sistema modal (K), além de ser um brilhante matemático. Então, diante da relevância de seus escritos, nos propomos a trazer um entendimento sobre sua produção na área da filosofia da linguagem, aproximando com sistematicidade rigorosa esse entendimento com a área da lógica, através da sua construção da estrutura de modelo normal.

A relevância deste trabalho consiste numa abordagem que envolve a filosofia da linguagem e a lógica em suas dimensões sintática e semântica. Este trabalho é também uma contribuição para investigações futuras, ou seja, ele não é um fim em si mesmo. Existem inúmeras possibilidades de ampliarmos este estudo, conduzindo para outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a epistemologia e a metafísica, bem como na aplicação da validade de argumentos na seara jurídica.

CAPÍTULO 1

ESTUDO DA TEORIA DA REFERÊNCIA CAUSAL DE KRIPKE

1.1 As bases da teoria da referência causal de Kripke

A obra *Naming and Necessity* (abreviado por *NN*) de 1980 consiste numa coletânea de três palestras públicas na Universidade de Princeton em janeiro de 1970, quando Kripke tinha 29 anos. Estas palestras foram gravadas e transcritas por dois professores do departamento de filosofia de Princeton, Gilbert Harman e Thomas Nagel. Kripke adicionou as notas de rodapé, e posteriormente escreveu o prefácio para a versão em livro.[2]

Kripke também escreveu outros trabalhos, tais como: o artigo *Identity and Necessity*; Wittgenstein sobre *As Regras da Linguagem Privada* (1982); *Problemas Filosóficos* (2011), *Referência e Existência*, 2013; *Problemas Lógicos* será a sua próxima publicação, além de dezenas de artigos publicados desde 1959 até 2017, na área da filosofia analítica, filosofia da linguagem e lógica. A obra *NN*, juntamente com o seu artigo *Identity and Necessity*, são as mais conhecidas e relevantes. Atualmente, ele continua brilhantemente lecionando Programa da Computação em CUNY – The University of New York, NY – USA.[3]

Tudo começou em meados dos anos 60, quando se vivia uma grande discussão filosófica nos recintos acadêmico-científicos. Neste ambiente, fervilhavam questões acerca da filosofia da linguagem voltada para a lógica modal. Dentre os principais protagonistas estavam Rudolf Carnap, W.V. Quine e Ruth Barcan Marcus; estes dois últimos contribuíram para a questão em jogo por serem pioneiros em publicar sistemas axiomáticos de lógica modal quantificada (a combinação da lógica de predicados com a lógica modal de C. L. Lewis). (SANTOS, 2012, p. 10).

Esse terreno era por demais fértil para buscar o desenvolvimento de uma lógica modal madura, com um sistema dedutivo e uma semântica formal em harmonia entre si, além de uma interpretação intuitivamente aceitável.

[2] Em 2012, foi publicada a tradução para a língua portuguesa por Ricardo Santos e Teresa Filipe, (Universidade de Lisboa – Portugal) sob o título *O Nomear e a Necessidade*.
[3]*Site*: http://web.gc.cunny.edu/kripkecenter/. Acessado em 24/11/2020.

Nessa época, Quine fazia muitas objeções a uma possibilidade de uma nova lógica que satisfizesse o problema da interpretação para as fórmulas válidas da lógica modal; então, ele propôs um desafio a Kripke: que solucionasse esse problema através do 'essencialismo'.

Assim, Kripke deu início à elaboração da sua obra *Naming and Necessity* (1980) em resposta ao desafio de Quine para solucionar o problema de dar uma interpretação intuitiva às fórmulas válidas do sistema. Dizia Quine: "Talvez o sistema modal devesse adotar o essencialismo"; Quine se referia àquela perspectiva filosófica tradicional segundo a qual as propriedades que um objeto tem se dividem em propriedades essenciais (necessárias) e propriedades acidentais (contingentes). (SANTOS, 2012, p. 13).

1.1.1 Sobre *O nomear e a necessidade*

Especificamente, em seu prefácio, Kripke expressou que era o seu desejo descrever o contexto e a gênese das suas ideias, criadas entre os anos de 1963 a 1964, sob a influência de trabalhos anteriores ao seu sistema da lógica modal. (KRIPKE, 2012, p. 40).

Já na primeira palestra da obra *O nomear e a necessidade* (2012*)*, Kripke deixou bem claro o objetivo da publicação das suas três palestras proferidas em Princeton (1970): tratar de desenvolver as relações entre 'o nomear e a necessidade', trazendo implicações vastas que se estendem para outros problemas da filosofia. (KRIPKE, 2012, p. 67, 68).

Kripke afirmou que suas perspectivas poderiam surpreender seus leitores, pois à primeira vista poderiam parecer erradas. Suas atenções foram atraídas para os problemas da necessidade e da aprioridade nas espécies naturais, ou da essencialidade das origens[4]. Seu desejo era tornar clara a percepção da relação entre 'o nomear e a necessidade', por parte de seus leitores. (KRIPKE 2012, p.69).

Suas discussões foram muito profundas, impactantes e de um amplíssimo alcance em várias áreas do conhecimento, tais como: a metafísica, a epistemologia, a filosofia da mente, a lógica. Kripke apresentou críticas à tradição filosófica quanto às noções clássicas da filosofia: a identidade, a verdade quanto à necessidade e à contingência, o que merece certamente ter um tratamento mais aprofundado em futuros estudos. (KRIPKE, 2012, p. 68; 203).

Um exemplo que trazemos aqui é o caso de que a filosofia contemporânea afirma que há certos predicados vazios, ou nulos por contingência e não por necessidade, e Kripke não faz

---

[4] KRIPKE 2012, página 69, nota 2.

nenhuma objeção a isto. Mas quando ele analisa o exemplo da proposição ‘o Unicórnio existe’, ele aponta para um novo paradigma de verdade. O autor afirma que:

> [...] É certo que não existem Unicórnios, mas, é evidente que poderiam ter existido, sob determinadas circunstâncias. Para Kripke, é certo que esta afirmação não é verdadeira, todavia, esta perspectiva de verdade para Kripke, é muito diferente disso. Ele sugere colocar a questão sob uma outra forma. (KRIPKE, 2012, p. 69).
>
> [...] Não se deve colocar em termos de que é necessário que não existam Unicórnios, mas, não é possível dizermos sob que circunstâncias existiriam Unicórnios. (KRIPKE, 2012, p. 69-70).

A noção de identidade com base no entendimento da metafísica é resgatada, ao apresentar distinção entre as noções metafísicas e epistemológicas sobre o conceito de identidade.

A respeito disso, Kripke ironiza ao afirmar o seguinte:

> [...] A referência equivocada a objetos ‘contingentemente idênticos’ servia de muleta filosófica: permitia que os filósofos pensassem em certos designadores *simultaneamente* como se fossem não rígidos (ocorrendo por isso em ‘identidades contingentes’) e como se fossem rígidos, escamoteando-se o conflito ao se pensar nos objetos correspondentes como ‘contingentemente idênticos’. (KRIPKE, 2012, p. 43-44).

Kripke fez tal colocação diante de muitos flagrantes de contingências, tais como a do exemplo de Frege: Héspero e Fósforo, onde se alegava que estes nomes próprios tinham uma natureza contingente. (KRIPKE, 2012, p. 43-44; 89; 165).

Santos também faz menção às críticas de Kripke a Quine e Ruth Barcan Marcus, que também tentavam sustentar tal concepção. (SANTOS, 2012, p. 16)

No caso de Héspero e Fósforo, Kripke demonstrou que ocorria uma mudança entre os turnos matutino e vespertino, mas não havia mudança do objeto referente. A identidade do objeto referente não era alterada, pois foi depois de descobertas da ciência astronômica que se chegou a confirmar que se tratava, na realidade, do planeta Vênus. Kripke concluiu que era por demais evidente que, a partir de “objetos necessariamente idênticos” do ponto de vista da metafísica leibniziana, a suposição comum às discussões lógicas e analíticas de que os objetos poderiam ser contingentemente idênticos, seria decididamente falsa, desde os seus pilares. (KRIPKE, 2012, p. 111; 165-166).

Então, com o fim de dar força ao seu argumento, Kripke evocou o ‘Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos’ de Leibniz, também denominado de ‘Lei de Leibniz’. Kripke afirmou ser tão óbvia quanto o ‘Princípio da Não Contradição’, e que julgava muito bizarro que filósofos duvidassem dessa convicção. Os contraexemplos envolvendo propriedades modais acabavam por apresentar uma confusão, por não expressar propriedades genuínas ao confundir conceitos individuais com a identidade entre indivíduos. A teoria dos modelos - a semântica de Kripke – só veio confirmar este princípio leibniziano. (KRIPKE, 2012, p. 42).

Este raciocínio conduziu Kripke a ampliar a sua discussão e a construir os argumentos contra a teoria do descritivismo: o argumento modal, o epistêmico e o semântico. (KRIPKE, 2012, P. 110-11, 120, 152-153, 217).

A teoria da referência de Kripke é o fundamento para toda a construção dos seus argumentos, seminalmente voltados para a sua crítica ao descritivismo da tradição da filosofia clássica. Passemos agora a conhecer um pouco mais acerca das noções dessa nova teoria.

1.1.2 Noções da teoria da referência causal de Kripke

É na teoria da cadeia causal de Kripke que vamos encontrar a explicação sobre como a referência tem vínculo com seu respectivo nome próprio. A cadeia causal se forma a partir de um batismo, que dá origem ao nome, e no decurso da sua história as referências são transferidas pela comunidade de falantes na qual ele está inserido. (SANTOS, 2012, p. 27-28).

Esta nova abordagem destaca que, enquanto falantes, somos membros de uma comunidade. A generalidade dos nomes que usamos são, de certa forma, criações nossas, pois eles têm uma história mais ou menos longa e chegaram até nós por via da nossa interação comunicativa com outros falantes. Na verdade, a história anterior que cada nome tem contribui decisivamente para lhe conferir uma referência.

Os nomes são dados aos objetos, mas isso não ocorre com as referências. Por exemplo: para Kripke, não é mistério que o falante consiga se referir a algo que nunca viu, e o faz em razão de pertencer a uma comunidade de falantes, que transmitem as referências de ‘elo em elo’, ao longo de uma cadeia causal que se estende desde o primeiro uso até o uso presente aqui e agora. (SANTOS, 2012, p. 27).

Por esta razão, Kripke argumenta que, por muitas vezes, o utilizador dos nomes sabe pouco, ou pode estar bem equivocado a respeito do objeto a que se refere. E que o descritivista erra, ao acreditar que a explicação para a referência dos nomes que eu uso deve se encontrar exclusivamente em mim - nos meus estados, ou processos internos e privados. (SANTOS, 2012, p. 27).

Segue-se daí a apresentação da noção de cadeia causal, com o objetivo de explicar como as descrições são aplicadas aos seus referentes, assim como da origem batismal do nome do referente, que pode ser constituído por ostensão.

Em uma palestra realizada no dia 30 de maio de 2019, e publicada em 13 de junho de 2019, Kripke apresentou o segundo exemplo de batismo por ostensão.

Um exemplo de um batismo sem ostensão é o caso do nome do Planeta Netuno,[5] que teve o seu batismo por causa de uma perturbação na órbita de Urano. (KRIPKE, 2012, p. 137; 157).

Assim, a teoria filosófica da referência é uma relação que liga um nome ao seu referente — mais especificamente, é uma resposta à questão de saber o que é preciso para haver uma ligação referencial entre um nome e o indivíduo.

Kripke associa o conceito de cadeia causal para esclarecer a condição eminente da relação entre as descrições e os nomes. Esta cadeia se forma no decurso da história do indivíduo, quando este está inserido numa comunidade de falantes. As descrições são atribuídas pela comunidade ao referente de elo em elo, de falante a falante, no decorrer da sua vida. E a origem do nome é o batismo inicial que pode ser por ou sem ostensão. (KRIPKE, 2012, p. 153-154; 157).

Ao longo da história causal, pode acontecer o fato do uso de um nome que se atribui a um personagem histórico, por meio de um processo de transmissão ao ligar os diversos usos dos nomes por diferentes falantes, em condições adequadas de referência, dar esse mesmo nome a um cão. Segundo Kripke: “nem todo o gênero de cadeias causais que se estendem de mim até um certo homem conseguirão fazer-me referir esse homem.” (KRIPKE, 2012, p. 153-154).

Ou seja, a cadeia de comunicação necessária para que se transmita a referência é aquela tal que cada falante, quando aprende ou recebe um nome de outro falante, tenha a intenção de

[5] *Naming and Necessity* Revisited – Prof. Saul Kripke. Link: https://www.youtube.com/watch?v=3zazonG6zBk.

usar este nome para se referir ao mesmo objeto. Este é o caso quando adoto 'Napoleão' para o nome do meu cão[6]. (KRIPKE, 2012, p. 29, 153-154).

Não é novidade que, na obra *O nomear e a necessidade* (2012), Kripke nos traz a sua teoria da referência em clara oposição às teorias dominantes da época, porque essa resgata uma nova noção para a teoria da referência: a noção de designadores rígidos e não rígidos, ou seja, para Kripke, os 'nomes próprios' possuíam um comportamento semântico distinto das referências. Os 'nomes próprios' tinham uma característica rígida, em outras palavras, permaneciam inalterados ao serem submetidos às situações contrafactuais, ou diferentes estados das coisas, ou mundos possíveis, enquanto que as referências atribuídas a um determinado objeto não se mantinham inalteráveis, quando submetidas às situações contrafactuais, ou mundos possíveis.

> [...] De fato, tal como afirmei antes, defenderei que os nomes próprios são sempre designadores rígidos. Frege e Russell parecem seguramente ter defendido a teoria segundo a qual um nome próprio não é um designador rígido e é sinônimo da descrição que substitui. Mas uma outra teoria pode ser a de que esta descrição é usada para determinar uma referência rígida. (KRIPKE, 2012, p. 111).

Esta nova compreensão acerca dos 'nomes próprios' fez oposição à antiga noção fregeana de que os nomes detinham sentido. Kripke percebeu um problema epistemológico que conduzia a uma interpretação equivocada de que um objeto poderia ter uma identidade contingente.

Outra noção oriunda dessa teoria kripkeana é a da cadeia causal que é a responsável pelo processo de denotação, por meio de uma cadeia de falantes. Os nomes teriam origem no batismo inicial, por ostensão, enquanto que as referências seriam o resultado de uma cadeia causal na qual uma comunidade de falantes transmitiria as referências acerca de um objeto específico, de falantes para falantes como através de um elo de comunicação entre eles.

Portanto, na teoria da referência histórico causal de Kripke, temos o retorno à noção da causalidade, pois, segundo Kripke, o nome é oriundo do batismo causal, da origem do ente; é a partir da origem batismal que o ente passa a ser acompanhado por referências atreladas ou indexadas ao seu nome, o que constitui a cadeia de história casual, quando a comunidade de falantes transmite as referências acerca das propriedades do ente batizado com um nome.

[6] Na introdução da obra O Nomear e a Necessidade (2012), Ricardo Santos utiliza uma citação de Kripke (p.153-154) a respeito de como se dá a transmissão do nome ao longo da cadeia causal que liga os diversos usos por diferentes falantes. (*Cf.* Página 29).

Agora, vamos pormenorizar cada elemento da teoria da referência histórico causal de Kripke, com base na sua obra *O nomear e a Necessidade*.

1.2 Elementos da teoria da referência histórico causal

Os elementos a serem apresentados serão: os mundos possíveis, os designadores rígidos e não rígidos, a teoria histórico-causal da referência, o batismo inicial e a relação de acessibilidade.

1.2.1 O mundo atual e os mundos possíveis

O mundo atual é o mundo real no qual o objeto referente existe. Mas quando falamos em modalidade dos operadores de necessidade e de possibilidade, consideramos também situações contrafactuais que poderiam ou não ter acontecido.

As situações contrafactuais fazem uma relação paralela de uma outra possível forma de existência – daquela que poderia ter acontecido, mas de fato não aconteceu. Estas situações contrafactuais, estipuladas paralelamente ao mundo atual do objeto referente, são os mundos possíveis. (SANTOS, 2012, p. 18).

Exemplo: No mundo atual, Franklin foi o inventor das lentes bifocais. Em uma situação contrafactual, ou mundo possível, não foi Franklin, e sim um dos seus irmãos, que inventou as lentes bifocais, e o seu irmão será o objeto referente do enunciado.

Muitos adotam de modo equivocado a ideia de mundos possíveis como se fossem mundos distantes, existindo de alguma maneira em uma outra dimensão, devido à interpretação errônea do conceito dos mundos possíveis, o que Kripke repudiou. (KRIPKE, 2012, p. 57).

No entanto, Kripke traz um exemplo para explicitar de modo mais simples a noção acerca dos mundos possíveis: quando se faz analogia a um exercício escolar, de probabilidade com lançamento de dois dados – A e B, temos que, para cada dado, há seis resultados possíveis. Portanto, há 36 estados possíveis do par de dados, no que se refere aos números que são mostrados na superfície (lado para cima). Aprendemos a computar probabilidades de vários acontecimentos, ao lançarmos os dados.

O que deve ficar claro é que, para Kripke, estes 36 estados de mundos possíveis são literalmente 36 mundos possíveis. Kripke explicita que esta é uma situação hipotética de um jogo de dados, na qual esses 36 mundos prefiguram "minimundos", ou estados possíveis nos quais os dados mostrarão ao serem lançados. Como lógico-matemático, ele acrescenta duas condições para essa representação: que tudo que há no mundo, além dos dados, seja ignorado; e que seja ignorada a não existência desses dados.

Como os dados de fato caem, e os números da superfície representam o mundo atual, então as 36 possibilidades, incluindo o real, são estados abstratos dos dados, e não entidades físicas complexas. (KRIPKE, 2012, p. 59).

Os mundos possíveis são um pouco mais que esses minimundos de um exercício de probabilidade. A noção geral dos mundos possíveis envolve noções que a versão em miniatura não envolve, porque os mundos em miniatura, neste exemplo dos dados, estão firmemente controlados: as propriedades relevantes (os números da superfície) e a ideia relevante das possibilidades. (KRIPKE, 2012, p. 60).

Logo, os mundos possíveis são maneiras como o mundo poderia ser, totais ou estados, ou histórias do mundo todo. (KRIPKE, 2012, p. 60).

Devemos lembrar também que a terminologia dos "mundos" pode muitas vezes ser substituída pela linguagem da lógica modal, tal como é "possível que" representado pelo operador lógico $\Diamond P$. E, consequentemente, uma situação contrafactual poderia ser entendida como um minimundo ou um mini estado, limitada aos aspectos do mundo relevantes para o problema em questão. (KRIPKE, 2012, p. 61).

Vejamos agora as condições de necessidade e contingência dos mundos possíveis:

Se perguntamos se uma coisa poderia ter sido verdadeira ou se poderia ter sido falsa, então, se uma coisa é falsa, é óbvio que não é necessariamente verdadeira. E, se é verdadeira, então, poderia ter sido de outra maneira? É possível que o mundo fosse diferente do que é? Se a resposta for 'não', então esse fato acerca do mundo é um fato necessário. Se a resposta for 'sim', então este fato acerca do mundo é contingente. Em si e por si mesmo, isto nada tem a ver com o conhecimento que alguém tenha de alguma coisa. Isto é uma tese filosófica e não uma questão de equivalência definitória, ou seja, que tudo o que é a priori é necessário, e que tudo o que é contingente é a posteriori. (KRIPKE, 2012, p. 106).

Podemos então afirmar que, para Kripke, com a sua teoria semântica dos mundos possíveis, não existem identidades contingentes, ou seja, muitos objetos poderiam ser diferentes do que realmente são, mas nenhum objeto não poderia não ser ele próprio.

Desta forma, Kripke deixou aberta a porta para a existência das verdades a priori contingentes e de verdades a posteriori necessárias.[7], e recuperou o essencialismo da filosofia tradicional de matriz aristotélica, sendo o sentido metafísico da necessidade, inegavelmente, um dos responsáveis na mudança significativa para a filosofia contemporânea. (SANTOS, 2012, p. 14).

1.2.2 A tese da rigidez: os designadores rígidos e os não rígidos

Em um designador rígido ocorre o fato da referência ao objeto designar o mesmo objeto em todos os mundos possíveis; se não for esse o caso, então tratar-se-á de um designador não rígido ou acidental. Portanto, designar rigidamente um certo objeto é designar esse objeto onde quer que ele exista; se o objeto é um existente necessário, então o designador pode ser chamado fortemente rígido.

Por exemplo: ‘O presidente dos EUA em 1970’ designa um certo homem, ‘Nixon’. Mas alguma outra pessoa poderia ter sido o presidente em 1970, Humprey talvez. Logo, este designador não é rígido.

Nesta palestra, Kripke defende de maneira intuitiva que os nomes próprios são designadores rígidos, porque, apesar de o homem (‘Nixon’) pode não ter sido o presidente dos EUA, não se dá o caso de que ele pudesse não ter sido ‘Nixon’.

Portanto, um designador rígido é um termo que teria sentido por si próprio e que serviria também para referir ao mesmo objeto no mundo atual, e em outro mundo possível no âmbito da lógica modal. Ao se falar em modalidades, estamos falando também de situações contrafactuais que não aconteceram, mas poderiam ter acontecido em outros mundos possíveis. O referente da descrição é, em cada mundo possível, o objeto ou indivíduo (se existir algum) que neste mundo satisfaz as condições incluídas na descrição.

---

[7] Para ilustrar a diferença entre essas verdades, Kripke cita o exemplo de uma barra de platina a que convencionalmente atribuiu-se um metro. Kripke diz que apenas se fixou uma referência, em certo sentido a priori, entretanto ele questionou a possibilidade de a barra ter sofrido uma dilatação por um agente externo, o que modificaria o seu comprimento, o que a tornaria uma verdade a posteriori necessária. (KRIPKE, 2012, p. 106 e 117).

A questão da tese da rigidez é que, para cada um dos enunciados propostos, podemos perguntar se o que é expresso seria verdadeiro numa situação contrafactual se e somente se algum indivíduo fixo tivesse a propriedade adequada. (KRIPKE, 2012, p. 49).

Quando se fala de designadores rígidos, fala-se de uma possibilidade de que não há dúvidas que existe numa linguagem modal formal. A ideia intuitiva que temos do nomear sugere que os nomes são rígidos, ao contrário do que se supunha, em pressupostos anteriores, de que os nomes comuns, ou identidades poderiam ser contingentes, ou melhor, poderiam ser não rígidos. A ideia de que os nomes comuns possam ser contingentemente idênticos é falsa! (KRIPKE, 2012, p. 43).

Vejamos alguns exemplos de designadores rígidos:

1) “Aristóteles gostava de cães”. A tese da designação rígida diz que o mesmo paradigma se aplica às condições de verdade que (1) tem quando descreve situações contrafactuais. Ou seja, (1) descreve de modo verdadeiro uma situação contrafactual se e somente se, o mesmo homem acima mencionado tivesse gostado de cães.

2) Russell diria: “O último grande filósofo da Antiguidade gostava de cães”.

3) Ou seja: “Existe exatamente uma pessoa que foi a última dentre os grandes filósofos da Antiguidade e todas as pessoas assim gostavam de cães”.

Pensemos em uma situação contrafactual, na qual Aristóteles tivesse não sido o último grande filósofo da Antiguidade. Pelo critério de Russell, quando colocássemos outra pessoa, em substituição de “Aristóteles”, teríamos como resultado que “o gosto de cães” dessa outra pessoa não poderia servir como correção da asserção (1).

Outras pessoas poderiam usar Aristóteles para nomear outros indivíduos ou objetos, ou ainda mais de um objeto. (KRIPKE, 2012, p. 45-49).

A rigidez se dá pelo fato de, no caso acima citado, se tratar do uso convencional do nome Aristóteles; o entendimento fixo de (1) é a correção de toda a situação contrafactual, pelo fato de que certa pessoa única teria gostado de cães. Russell só pode ler (1) como (3) e não poderia fazê-lo se Aristóteles significasse Onassis. Isto viola a exigência da rigidez.

Como é óbvio, não exigimos que os objetos existam em todos os mundos possíveis. ‘Nixon’ poderia não ter existido, se os seus pais não tivessem se casado. Quando pensamos uma propriedade que é essencial a um objeto, o que costumamos dizer é que: ela é verdadeira desse objeto em todos os casos que ela exista (a propriedade). E podemos dizer que um designador rígido de um existente necessário é fortemente rígido. (KRIPKE, 2012, p. 99).

Segundo Kripke, as descrições possuem características distintas dos nomes próprios: os nomes apresentam uma rigidez com alcances distintos, enquanto as referências das descrições não apresentam a rigidez característica dos nomes próprios ao designar um mesmo objeto. Este fenômeno da rigidez aparece somente nos nomes próprios, e não nas descrições definidas.

Esta flexibilização das descrições tornou mais que evidente a inaplicação da necessidade da identidade, em geral, às afirmações que usam descrições como, por exemplo, "o inventor das lentes bifocais é o inventor do para-raios", pois, obviamente, teríamos outros mundos possíveis nos quais não seria necessariamente uma única pessoa que os tivesse criado.

Num núcleo de seis teses descritivistas elencadas por Kripke, como já vimos anteriormente, cada uma delas é refutada por meio dos seus três argumentos: o modal, o epistêmico e o semântico.

Em clara oposição, Kripke afirmava que Aristóteles é um nome próprio rígido, enquanto Russell interpretava invariavelmente os nomes comuns de modo não rígido (KRIPKE, 2012, p. 50).

Suponhamos que, ao se considerar um designador rígido *a*: Se *a* denota (rigidamente) o único objeto que efetivamente tem a propriedade F, quando falamos de qualquer situação real ou contrafactual, então, poderíamos dizer que F*a* expressaria uma verdade contingente. Isso mostra que devemos separar as questões epistêmicas das questões de necessidade e contingência, e que fixar uma referência não é dar um sinônimo. (KRIPKE, 2012, p. 56).

Em suma, Kripke argumentou que os nomes próprios funcionavam como designadores rígidos, de modo que um nome denota o mesmo indivíduo em todos os mundos possíveis nos quais esse indivíduo se apresenta.

Deste modo, nosso autor se desviou dos conceitos das descrições, e criou o conceito dos designadores como termos que teriam sentido em si mesmos, e que serviriam para referir um objeto, porque, quando falamos das modalidades do possível e do necessário, falamos também de situações contrafactuais, que não aconteceram, mas poderiam ter acontecido, o que por força do hábito se chamou de "outros mundos possíveis".

Assim, um dos principais objetivos de Kripke é precisamente refutar as teorias descritivistas, que afirmam a associação estreita do nome a uma descrição do objeto nomeado.

Para Kripke, um nome próprio é equivalente ao nome de uma pessoa, de uma cidade, ou de um país. (KRIPKE, 2012, p. 70).

Vale ressaltar que, pelo argumento modal, Kripke demonstrou que a situação contrafactual que revela um elemento novo introduz o conceito dos designadores rígidos. Quando se analisa a situação contrafactual, o indivíduo continua satisfazendo à nova e distinta descrição proposta, ao passo que no caso do nome isso não acontece, pois sempre será o mesmo referente em todas as situações possíveis. Os designadores rígidos são a principal tese defendida na obra *O Nomear e a Necessidade*.

Outro exemplo da noção de necessidade inerente ao nome que temos para oferecer é que os lógicos modernos estavam interessados em descrições definidas (o x tal que φx), ou, como exemplo: 'O homem que corrompeu Hadleyburg'. Ora, se um e somente um homem corrompeu Hadleyburg, então esse homem é o referente dessa descrição (no sentido dos lógicos). (KRIPKE, 2012, p. 70).

Kripke vai usar o termo 'nome' de modo a não incluir descrições definidas nesta classe, mas somente aquelas coisas que na linguagem corrente chamamos de 'nomes próprios'. (KRIPKE, 2012, p. 70).

Segundo Kripke: "Se quisermos um termo comum para cobrir nomes e descrições, podemos usar o termo 'designador'". (KRIPKE, 2012, p. 70).

Já o termo para indicar o objeto que é o único a satisfazer as condições presentes da descrição definida é 'o referente do objeto' (KRIPKE, 2012, p. 72).

1.2.3 A identidade transmundo

Em sua obra *Naming and Necessity*, Kripke não apresenta o conceito de identidade transmundial explicitamente; por esta razão, consideraremos aqui, a partir dos exemplos dados pelo nosso autor, que a identidade é uma relação entre o nome próprio e o mundo atual, além dos mundos possíveis.

Vejamos os seguintes exemplos:

1. 'Nixon' 'é o homem que venceu as eleições'. (Mundo atual – *Ma1)*
2. 'Nixon' poderia não ter vencido as eleições. (Mundo possível – *Mp*1)

Nos exemplos 1 e 2, percebemos que o nome próprio ‘Nixon’ é o mesmo em dois mundos – o atual e o possível –, sendo o mesmo objeto referente, possuindo a mesma identidade, tanto no mundo possível, quanto no mundo atual.

Portanto, é bem evidente que o que ocorre aqui é o caso de uma identificação transmundial, pois o objeto referente possui a mesma identidade tanto no mundo possível, quanto no mundo atual. O que não ocorre, respectivamente, com as descrições definidas do objeto referente, pois cada descrição no mundo atual e possível lhes são distintas. (KRIPKE, 2021, p. 96-97).

A seguir, apresentaremos mais dois exemplos para elucidar o conceito de identidade transmundial:

3. ‘Hitler’ é o homem que orquestrou o extermínio de seis milhões de pessoas. (Mundo atual – *Ma2*)
4. ‘Hitler’ poderia ter sido um homem pacato que vivia em Linz. (Mundo possível – *Mp2*)

Sabemos que este nome ‘Hitler’, por si só, como todos hão de convir, traz uma noção a respeito do referente, ou seja, é quase tautológico pensar que este homem era mau.

No entanto, vamos analisar que, se aconteceu o enunciado (3), temos igualmente no enunciado (4) uma situação que não aconteceu, mas que poderia ter acontecido.

Portanto, se ‘Hitler’ não tivesse chegado ao poder, ele não possuiria as propriedades que possui no mundo atual, propriedades estas que estão fixadas em seu nome. (KRIPKE, 2021, p. 132 e 134).

Desta forma, percebe-se com clareza solar que o mesmo objeto referente é apresentado nos dois mundos – o atual ou concreto, e o mundo possível – e os nomes, entre todos os mundos possíveis.

1.2.4 A relação de acessibilidade

Embora nas seções anteriores já tenhamos apresentado os argumentos e o conceito de mundo possível, aqui se faz necessário retomá-los para apresentar o conceito de relação de acessibilidade.

No argumento modal, Kripke traz a concepção das situações contrafactuais que revelam os designadores rígidos e os designadores não rígidos, que são as descrições flexíveis no contexto da mudança de âmbitos entre os mundos real e possível. Como aponta Santos:

> [...] Este argumento modal põe em relevo uma diferença importante no comportamento semântico de nomes próprios e descrições definidas. Quando dizemos, por exemplo, "o professor de Alexandre poderia não ser filósofo", estamos a considerar uma situação contrafactual ou um mundo possível no qual Alexandre foi ensinado por um e um só homem (que não foi Aristóteles), o qual não seria um filósofo. Quando usamos uma descrição para descrever uma situação contrafactual, referimo-nos ao indivíduo seja ele qual for, que satisfaz a descrição nessa situação. (SANTOS, 2012, p. 22-23).

Uma situação contrafactual é um mundo possível, no qual se abre um acesso do operador modal da possibilidade. No mundo possível, ou na situação contrafactual, percebe-se que as referências não apresentam a mesma rigidez como ocorre aos nomes próprios, e daí se conclui que não se aplica a necessidade da identidade à afirmação que usa descrições, como nos mostra Kripke:

> [...] Os mundos possíveis são maneiras como o mundo poderia ser, totais ou estados, ou histórias do mundo todo.
>
> [...] Uma descrição prática daquilo em que a 'situação contrafactual' difere relevantemente dos fatos reais é suficiente; a 'situação contrafactual' poderia ser entendida como um minimundo ou um miniestado, limitado aos aspectos do mundo relevantes para o problema em questão. (KRIPKE, 2012, p. 61)
>
> [...] Um designador é rígido quando designa a mesma coisa em todos os mundos possíveis, quero dizer, tal como é usado em nossa linguagem, ele representa essa coisa, quando nós falamos sobre situações contrafactuais. (KRIPKE, 2012, p. 134).

Essa relação de acessibilidade se dá entre o mundo atual e os mundos possíveis, nos quais os elementos referentes ao objeto são descritos de modo diferente pelo qual este é descrito no mundo atual, caracterizando assim as relações entre os dois mundos: o atual e os mundos possíveis, nos quais as possibilidades serão entidades abstratas.

Assim, a relação de acessibilidade **R** de um modelo Kripke contém pares $(a, b) \in \mathbf{R}$ de mundos possíveis ('*b*' é acessível '*a*', ou seja, há uma função de acessibilidade de '*a*' em '*b*'). (GABBAY, 2012, p. 66:7).

A estrutura semântica de acessibilidade possui três componentes: <*a*, **R**, *b*>, que significam respectivamente, o mundo atual, a relação existente entre '*a'* e *'b',* e os mundos possíveis.

Segundo o conceito de acessibilidade: uma possibilidade, ou $\Diamond P$, só é verdadeira se e somente se *P for* verdadeira em pelo menos um dos mundos possíveis de *k*, onde *k* é acessível ao mundo atual *g*, assim **R***gk*.

Já uma proposição de necessidade, ou $\Box P$, só é verdadeira, se e somente se, *P* for verdadeira em todos os mundos possíveis *k* na relação **R***gk*.

Vista a noção do conceito de relação de acessibilidade por meio de Kripke e Gabbay, iremos agora encerrar este capítulo, apresentando a relação entre designação rígida, mundos possíveis, relação de acessibilidade por um outro autor.

Em seu artigo *Nomes, Essência e Possibilidade*[8], Soames faz uma conexão entre a designação rígida, mundos possíveis e o critério de 'identificação transmundo', e neste tópico apresenta duas questões: primeiramente, Soames considerou como um 'pseudoproblema' o problema que Kripke chama de 'um critério para identificação transmundo'; em segundo lugar, Soames afirma que a estipulação de mundos possíveis citados por Kripke depende de nós mesmos. Assim, por exemplo: se 'Nixon' fosse um objeto inanimado, ou como o próprio Kripke diz, "um ser autômato", não seria uma estipulação de mundos possíveis bem sucedida. Nesse tipo de caso, não há tal estado possível do mundo correspondente à nossa especificação. (SOAMES, 2016, p. 23-25).

Como todos sabem, Scott Soames é um renomado filósofo americano, Ph.D. em filosofia, defensor e expansionista do programa de filosofia da linguagem iniciado por Kripke, especialista em filosofia da linguagem, e da história da filosofia analítica, professor de filosofia da Universidade de Princeton e da Universidade do Sul da Califórnia e o maior crítico acerca das duas dimensões das teorias do significado.

Entretanto, com todo respeito à sua brilhante carreira e reconhecendo seus importantes trabalhos como filósofo analítico, tecemos aqui um breve comentário, de tratamento cirúrgico, preciso, e muito específico a estas duas questões trazidas em seu artigo supracitado, em defesa

---

[8] (SOAMES, 2016, p. 23-25).

de Kripke e em desfavor à crítica feita por Soames, vamos tratar das duas questões com base na obra do próprio Kripke.

Em relação à primeira questão levantada por Soames, Kripke deixa bem claro que existe a necessidade de o objeto ser ele mesmo em todos os mundos possíveis, além de existir no mundo real. É uma condição da relação de acessibilidade que 'os nomes' dos objetos se refiram a si mesmos, e não a outros objetos quaisquer, como já vimos na citação da página 134 da obra *O nomear e a necessidade* (2012).

Em relação à segunda questão proposta por Soames, acerca de uma possível 'falha' do mecanismo de estipulação de situações contrafactuais ou de mundos possíveis, o que Soames quer nos chamar à atenção é que podemos fazer estipulações errôneas, tais como estipular que um tal de 'Nixon' poderia ter sido um autômato, ou um ser inanimado. (SOAMES, 2016, p. 25).

No entanto, Kripke não coloca a hipótese de alguém criar estipulações 'impossíveis' para os mundos possíveis ou situações contrafactuais. Se, como uma hipótese, vier a ocorrer uma estipulação impossível, então entendemos ser coerente se tratar de um estado impossível de acontecer, e não um estado possível.

Na realidade, a noção que Kripke apresenta em sua obra, com respeito à estipulação de situações contrafactuais, está intrinsecamente envolvida com a noção de verdade contingente e da verdade necessária. O modo como Kripke nos apresenta o processo da estipulação de situações contrafactuais, ou mundos possíveis é o seguinte: Se existe algo a respeito de algum objeto, esta referência poderia ser verdadeira ou falsa. Se é falsa, obviamente que não é necessariamente verdadeira, mas se ela é verdadeira, então, poderia ser diferente daquilo que realmente é, ou seja, poderia ter sido de outra maneira? Assim, se esta referência poderia ser diferente, então detectamos uma verdade contingente acerca desse objeto. Por outro lado, se o que referimos de um objeto é verdadeiro, e não poderia ter sido de outra forma, encontramos uma verdade necessária a respeito desse objeto.

Esta é uma condição criada através de questões que introduzem a noção de possibilidade a um estado possível das coisas, em relação a um determinado objeto. E é esta a forma expressa que representa esse processo de estipulação de situações contrafactuais ou mundos possíveis em relação a um dado objeto. Quando obtemos as respostas às perguntas, podemos detectar o comportamento semântico distinto entre 'nomes' e 'referências', o que nos indicará quais são as verdades necessárias e as verdades contingentes. (KRIPKE, 2012, p. 84).

Como exposto acima, acreditamos que Soames não percebeu corretamente a relação que Kripke faz entre o mundo atual e os inúmeros mundos possíveis, em função do mesmo objeto referente. Logo, se faz necessário que o objeto referente exista no mundo atual – o estado real das coisas –, pois não teria relevância para a semântica dos mundos possíveis se tal objeto não existisse.

Neste capítulo, não procuramos nos deter nas objeções existentes a respeito da teoria da referência causal de Kripke, nem tampouco nos limitar às refutações subsequentes de defesa. O nosso objetivo consistiu antes em apresentar aspectos da gênese das ideias e do contexto acadêmico científico que inspiravam Saul Kripke na elaboração da sua teoria, e por fim os principais elementos da semântica dos mundos possíveis criada por ele.

Em nosso próximo capítulo, abordaremos a linguagem para o cálculo proposicional modal.

CAPÍTULO 2

A SINTAXE DO CÁLCULO PROPOSICIONAL MODAL

2.1 Breve histórico da lógica modal

Neste capítulo, trataremos da dimensão sintática da lógica proposicional modal, que consiste em: linguagem, regras de formação de suas fórmulas, axiomas, regras de dedução e teorema. O Cálculo Proposicional da Lógica possui uma linguagem composta por cinco operadores lógicos, além das letras proposicionais. No caso da Lógica Modal Proposicional (LMP), adicionamos aos cinco operadores já existentes mais dois: o de necessidade e o de possibilidade, como veremos mais adiante, na seção 2.1.

Inicialmente, veremos um pouco do desenvolvimento histórico de alguns sistemas da lógica modal contemporânea.

Das lógicas complementares, a lógica modal é a mais antiga, podendo ser até mesmo encontrada nos silogismos modais de Aristóteles, como encontramos no seu Tratado *Os Primeiros Analíticos*[9] , onde apresentou dois tipos de modalidades: o necessário – aquilo que não pode não ser; e o contingente – aquilo que não é necessário, ou aquilo que pode ser ou não ser.[10][11]

No decurso da história filosófico-científica, o reconhecimento à relevância da lógica para a ciência se mostrou bastante oscilante entre sábios e filósofos. Por exemplo, na Antiguidade Clássica e Idade Média a Lógica era estudada com respeito e como propedêutica indispensável ao conhecimento mais avançado. Porém, no período do Renascimento e Iluminismo, ela foi um tanto prejudicada pela associação com sistemas filosóficos que acabaram por desprezá-la. Gergonne (1817) foi um matemático francês que, em seu ensaio sobre a lógica tradicional, afirmou que a lógica (esta) teria caído em descrédito, sendo ensinada

---

[9] ARISTÓTELES. Da Interpretação. In: *Organon*, (Tópico XII), 2010, p.101-107.
[10] *Ibidem*. Primeiros Analíticos. In: *Organon*, (Tópico: IX-30) p. 130, (Tópico IX: 25-30), p.132.
[11] KNEALE. Lógica Modal. In: O desenvolvimento da lógica, p. 572.

apenas nas academias góticas que, nos períodos de revoluções e guerras, retornaram aos estudos antigos devido a uma reação política de alguns educadores.

Kneale (1980) expressou estranheza pelo fato de que, após cem anos dessa obra de Gergonne, na qual ele trata a lógica com certa depreciação, esta veio a se tornar um dos principais centros de interesse por parte dos filósofos e matemáticos, além de se converter em um pré-requisito basilar dos grandes avanços tecnológicos.

Ainda na modernidade, Leibniz entendia e considerava a importância da lógica para a ciência. Acerca deste fato, Kneale afirma: ‘Leibniz foi o único a proclamar a relevância da lógica para a ciência.’ (KNEALE, 1980, p. VI-VII).

Segundo Kneale (1980, p. VII), no prefácio de sua obra sobre a relevância da lógica, ele afirma:

> [...] A importância da lógica é devida ao fato de suas noções básicas serem as de sistema e de ordem, isto é, serem as noções que são indispensáveis à elaboração de uma teoria sobre qualquer tópico. Possui relações íntimas com a metafísica, matemática, filosofia da ciência e linguística geral. Quando a abstração da lógica floresce, algumas ou todas as ciências estão vivas; e, conversamente quando não há consciência lógica, a vida intelectual do homem dissipa-se a sonhar no crepúsculo da mitologia.

Mas nem todos pensavam como Kneale; por exemplo, Mortari faz uma paráfrase de Kant ao afirmar: ‘a lógica tinha sido inventada pronta por Aristóteles e nada mais havia para fazer’.

No prefácio da *Crítica da Razão Pura,* Kant afirma:

> [...] Tempos, seguiu a via segura, pelo fato de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás, a não ser que se leve à conta de aperfeiçoamento a abolição das algumas subtilezas desnecessárias ou a determinação mais nítida do seu conteúdo, coisa que mais diz respeito à elegância que à certeza da ciência. Também é digno de nota que não tenha até hoje progredido, parecendo, por conseguinte, acabada e perfeita, tanto quanto se nos pode afigurar. (KANT, 2001, B VIII).

Todavia, a mudança desse pensamento kantiano teve seu marco inicial a partir da metade do século XIX, através da obra de George Boole[12] (1815-1864) chamada *Investigação sobre Leis do Pensamento,* com a qual ele deu início à simbolização ou matematização da

[12] George Boole criou uma estrutura algébrica que esquematizou as operações lógicas presentes nas tecnologias atuais, como em programas de computação, jogos virtuais e códigos de aplicativos computacionais como os utilizados por sites de buscas.

lógica. Boole apresentou um cálculo lógico – álgebra booleana – que continha um número infinito de formas válidas de argumento, e buscou aplicar a álgebra à lógica, ao tratar os símbolos como tipograficamente distintos dos símbolos da linguagem natural, o que veio a facilitar muito a compreensão da notação lógica. Essa mudança de paradigma de Kant para Boole foi determinante para a lógica modal, visto que esta passaria a ter o seu lugar definitivo na História do pensamento moderno. (MORTARI, 2001, p. 28).

Quanto à lógica modal, desde os seus primórdios ela não teve seu devido reconhecimento, pois não provocava atração dos inúmeros filósofos. Por exemplo, na obra *Begriffsschrift*[13] (*Conceitografia*[14]), Gottlob Frege considerou como irrelevantes as distinções modais, pois julgava ele que as noções de necessidade e possibilidade pertenciam ao campo da epistemologia, e não da Lógica. (KNEALE, 1980, p. 554).

De fato, a preocupação básica de Frege era a sistematização do raciocínio matemático, isto é, encontrar uma caracterização precisa do que é uma demonstração matemática, que não se recorre à experiência ou à observação, como nas outras ciências. Em sua obra, Frege fez uso de linguagens artificiais, à maneira da matemática, o que tornou a lógica contemporânea distinta e denominada de simbólica ou matemática. (MORTARI, 2001, p. 29-30, 34).

Contrariando as expectativas, a lógica clássica veio a se expandir através do surgimento de outras lógicas complementares, devido ao acréscimo de outros operadores lógicos, no seio dos quais veio a se estabelecer a lógica modal, com uma característica peculiar de seus novos operadores de necessidade e de possibilidade. (MORTARI, 2001, p. 357).

Somente na contemporaneidade é que ficou patente a todos a grande relevância da lógica modal para a filosofia e demais ciências. Seu marco inicial foi a partir da obra de C. I. Lewis, publicada em 1918 – *Survey of Symbolic Logic*, na qual ele apresentou a sua tese chamada 'a lógica da implicação estrita'- em clara oposição à tese da implicação de Whitehead e Russell. Lewis considerava errada a tese de que a expressão **P** implica materialmente **Q** como uma tradução de **P → Q**, e que Whitehead e Russell tentaram justificar esta maneira de falar dizendo que: se **P**, então **Q**. Ora **P**, portanto **Q**.

[13] MORTARI, *Introdução à lógica*, 2001, p. 34.
[14] FREGE., G., *Conceitografia*, 2009.

Segundo Kneale, este é sem dúvida um esquema válido de inferência; entretanto, é também uma expressão equivocada porque sugere erroneamente que a implicação material denotada pelo operador lógico → exprimia a conexão de sentido entre os sinais proposicionais que constituem o seu antecedente e o seu consequente. De modo que aqueles que desejassem empregá-la teriam que admitir os paradoxos de uma proposição simplesmente falsa, a implicar qualquer proposição; e, por outro lado, uma proposição verdadeira, a ser implicada por qualquer outra proposição. (KNEALE, 1980, p. 554-555).

Ao contrário disso, Lewis defendeu que uma proposição implica outra, em sentido estrito, se e somente se, é impossível que a primeira fosse verdadeira e a segunda falsa; então ele escreveu **P** ⟼ **Q** para exprimir essa relação entre as proposições expressa por **P** 'implica estritamente'[15] **Q**. (KNEALE, 1980, p. 534, 554).

Na sua definição, Lewis seguiu algumas sugestões de MacColl para a lógica modal, em sua obra *Symbolic Logic and its Applications*, publicada em 1906. Ambos reconheceram que uma proposição impossível tem que implicar qualquer proposição, e que uma proposição necessária tem que ser implicada por qualquer proposição. Lewis argumentou que estas proposições não eram paradoxais e que não serviam para desacreditar a sua tese, na qual ele justificava a inferência de uma premissa para a conclusão de uma dedução.

Críticos chegaram a alegar que a 'implicação estrita' de Lewis não era o mesmo que a implicação (ou seja, a relação conversa de 'seguir-se de') porque poderia ser satisfeita entre proposições de modo puramente externo, revelada pelos paradoxos. Mas nenhum deles conseguiu excluir estes paradoxos, sem, ao mesmo tempo, excluir os argumentos que qualquer pessoa considerava válidos. Também não compreenderam a semelhança entre as doutrinas da Antiguidade e da Idade Média. A última exposição de Lewis, publicada juntamente com H. C. Langford, foi em 1932. (KNEALE, 1980, p. 555).

Trinta anos depois, Paul Henle (1962) demonstrou que o sistema mais econômico de lógica modal, aquele que Lewis chama de S5, é equivalente à álgebra de Boole-Schoröder quando os elementos da álgebra são proposições e o símbolo modal ◊ é introduzido pelas regras[16]:

[15] Por convenção, adotaremos o símbolo '⟼' para o operador lógico de *implicação estrita.*

[16] (KNEALE, 1980, p. 558).

◊ P = 1 se e somente se P ≠ 1

◊ P = 0 se e somente se P = 0

Esse sistema, com o seu princípio forte de redução, é a concretização do que Boole tinha em mente quando sugeriu, na sua *Mathematical Analysis of Logic*, que o sinal ‘1’ poderia ser interpretado como representando a soma de todas as possibilidades, aquilo a que ele chamou o *Universo da Proposição.* (KNEALE, 1980, p. 557-558).

Mortari concorda com Kneale com respeito à gênese da lógica modal, ao admitir que o estudo contemporâneo das propriedades formais das modalidades iniciou-se com o trabalho de C. I. Lewis, mas também lembrou do protagonismo antecipado de Hugh MacColl[17]. Dessa forma, temos em Hugh MacColl o pioneirismo no âmbito da lógica modal axiomática.

Na formalização da sua tese da ‘implicação direta’ apresentada na sua obra *Survey of Symbolic Logic*, de 1918, Lewis tomou como ponto de partida os paradoxos da implicação material como encontrados na obra de Bertrand Russell - *Principia Mathematica*, conforme nos lembra Mortari.

Somente mais tarde, na obra *Symbolic Logic*, publicada juntamente com C. H. Langford, foi que Lewis trouxe uma clara exposição da formalização das noções modais, exposição esta na qual ele descreveu cinco sistemas distintos da lógica modal S1-S5, que ficaram conhecidos posteriormente como ‘os sistemas de Lewis’. (MORTARI, 1980, p. 16).

Vamos encontrar na obra[18] de Kneale os desenvolvimentos formais que surgiram após Frege. Dentre estes, temos a última exposição de Lewis e Langford[19], cujo símbolo ◊ é tomado como indefinido e $P \supset Q$ é introduzido como uma abreviatura de $\sim \Diamond (P \supset Q)$. Os outros símbolos indefinidos são os de negação e de conjunção, e as fórmulas dos axiomas utilizadas por ele são as seguintes:

---

[17] KNEALE, W e KNEALE, M, 1980, p. 555. *In:* MACCOLL, H., *Symbolic Logic and its Applications*, Londres, 1906.
[18] *Ibidem*, p. 519-557.
[19] *Ibidem,* p. 555. *In:* LEWIS, C., LANGFORD, C.H., *Symbolic Logic*, 1932.

B1. $p.q \supset q.\ p$
B2. $p.q \supset p$
B3. $p \supset p.p.$
B4. $(p.q). \supset p.\ (q.r)$
B5. $p \supset \sim\sim p.$
B6. $[(p \supset q).\ (q \supset r)] \supset (p \supset r)$
B7. $[p.\ (p \supset q)]. \supset q$
B8. $\Diamond\ (p.q) \supset \Diamond\ p$
B9. $(\exists\ p.q)\ [\sim (p \supset q). \sim (p \supset \sim q)]$

A letra B indica que o postulado pertence ao segundo conjunto de Lewis, sendo este distinto do sistema de *Survey of Symbolic Logic*[20]. A substituição para variáveis e a permuta de expressões estritamente equivalentes possui dois métodos permitidos de derivação, um de acordo com o esquema:

$$\frac{P \quad P \supset Q}{Q}$$

E outro de acordo com o esquema:

$$P$$
$$Q$$
$$P\ .\ Q$$

Na presença dos axiomas básicos, C11 é demonstravelmente equivalente à conjunção de C10, com o princípio de Brouwer[21] '$p \supset \sim \Diamond \sim p$'. Ao usar • como abreviatura de $\sim \Diamond \sim$ (isto é, com sentido de 'é necessário que') e usar os princípios da negação dupla e da contraposição para a implicação estrita, pode-se exprimir ambos os princípios acima, sem negação, do seguinte modo:

C10. $\Box\ p \supset \Box\Box$,
C11. $\Diamond\ p \supset \Diamond\ \Box\ p.$

[20] KNEALE, W e KNEALE, M, 1980, p. 556. *In:* LEWIS, C., LANGFORD, C.H., *Symbolic Logic*, 1932.
[21] *Ibidem*, p. 557.

A fim de esclarecer as relações entre a lógica de Lewis e a de Frege - ou dos *Principia Mathematica* [22], diversos autores se utilizaram de um ou mais sistemas de Lewis como derivados da própria *Principia Mathematica*, como também de alguns axiomas suplementares ou regras de inferências. Assim, para a derivação do sistema de Lewis, com o princípio fraco de redução, isto é, S4, Gödel[23] une à lógica primária dos *Principia Mathematica* as três fórmulas axiomáticas abaixo:

1. $\Box\, p \supset \Box\, p$
2. $\Box\, p \supset \Box\, (p \supset q) \supset \Box\, q$
3. $\Box\, p \supset \Box\, \Box\, p$

Em que □ é um símbolo primitivo e uma nova regra segundo a qual se *P* é uma tese do novo sistema; então, podemos também afirmar □*P*. Na mesma notação, o princípio forte de redução de S5 tomaria a forma:

4. $\sim \Box\, p \supset \Box \sim \Box\, p.$

Para Quine (1908-2000), ferrenho crítico da distinção entre o conhecimento analítico e sintético, a lógica tinha apenas uma função semelhante aos pronomes da linguagem natural. (KNEALE, 1980, p. 523).

O sistema lógico mais aceito foi aquele introduzido por Giuseppe Peano nas suas *Notations de Logique Mathematique*[24], de 1894, depois aperfeiçoada por Whitehead e Russell nos seus *Principia Mathematica* de 1910.

Ao passo que Lukasiewicz trazia a sua contribuição para a lógica modal por meio do seu estudo, que apresentava um outro sistema constituído, então, por letras minúsculas para as variáveis, concomitantemente, como maiúsculas para os operadores. Neste mesmo sistema, introduziu um novo símbolo funcional em que o símbolo de ‘possivelmente’ era representado

---

[22] *Ibidem*, p. 568.
[23] *Ibidem*, p. 561. *In*: GÖDEL, K. ‘*Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagen Kalküls’, Ergebinisse eines mathematischen Kolloquiums*, iv (1932) p. 39-40.
[24] KNEALE, W e KNEALE, M, 1980, p. 556. *In:* PEANO, G., *Notações de lógica matemática*, 1864.

por M de möglich (possível em alemão), mas que era bem diferente da noção de Lewis. Foi então que, por sugestão do seu discípulo A. Tarski, ele adotou para o seu símbolo de ‘possibilidade’ a equivalência $(\Diamond P) = (\sim P \rightarrow P)$, em que o aparente paradoxo desaparecia ao lidar com um sistema de três valores. Assim, Lukasiewicz elaborou seu sistema de três valores de modo bem coerente, além de lhe atribuir uma interpretação lógica.

Na escola fenomenológica, o precursor da lógica modal foi Oskar Becker, com seu artigo *Zur Logic der Modalitäten*[25] de 1930. (KNEALE, p. 577-578).

No ano de 1933, Rudolf Carnap e Kurt Gödel romperam com o fundador da lógica formal moderna, Frege, que era cético a respeito da viabilidade da lógica modal. Carnap e Gödel escolheram buscar a estrutura matemática de uma lógica que lidasse com três modalidades clássicas (possibilidade, necessidade e probabilidade).

Kurt Gödel também trouxe a sua colaboração, entre os anos de 1931 a 1933, ao apresentar alguns estudos no campo da lógica modal que permitiram o surgimento posterior dos sistemas axiomáticos.

Já em 1934 Gentzen apresentou um sistema de regras para a dedução natural, através do qual mostrou que qualquer demonstração num certo sistema de lógica que esteja relacionada com este sistema pode ser posta sob uma forma a que ele chamou de ‘normal’, caracterizada por não possuir uma operação chamada ‘corte’, e que é, em certo sentido, a mais direta possível. (KNEALE p. 544).

Este teorema foi a principal tese de Gentzen, mostrando-se muito relevante pois, por meio dela, chegamos a obter a demonstração da consistência da aritmética. Desta maneira, Gentzen concebeu uma apresentação da lógica de um modo mais natural do que aqueles desenvolvidos anteriormente por Frege, Whitehead e Russell. Temos no sistema de Gentzen a forma como cada símbolo é introduzido separadamente, e é possível demonstrar as equivalências que são usadas nos *Principia Mathematica* como definições dos sinais que não são tomados como primitivos, e como Crísipo utilizou na elaboração do seu sistema de lógica elementar, o esquema de inferência básico que permite a derivação para outros sistemas axiomáticos, em sua evolução. (KNEALE p. 545).

[25] *Ibidem* p. 556. *In:* BECKER, O., *Sobre lógicas das modalidades*, 1930.

Robert Feys, seguidor de Gödel, em 1937 propôs o sistema ‘T’ de lógica modal, e em 1957, em seu artigo *Les Logiques Nouvelles des Modalités.* Georg Henrik von Right propôs o sistema M, que é elaborado sobre o sistema ‘T’. (GORSKY, 2008, p. 18).

Em 1964, M. Schönfinkel fez uma modificação ainda mais radical da notação lógica, ao conseguir simplificar além do alcançado até então nesta notação, eliminando todas as variáveis, quer preposicionais, funcionais ou individuais. Descobriu que as variáveis que são normalmente usadas para escrever fórmulas lógicas não são mais do que símbolos auxiliares para fazer referências; se encontramos uma outra maneira de fazê-lo, então, poderíamos eliminá-las. (KNEALE, p. 540).

Para Gorsky, o século XX apresentou considerável avanço sobre o entendimento formal do significado das modalidades através dos trabalhos desenvolvidos por Jonsson, McKinsey e Tarski, na década de 40, quando permitiram a construção de resultados de completude algébrica para os sistemas modais. (GORSKY, 2008, p.17-18).

Nas décadas de 50 e 60, um grupo de filósofos empreendeu grandes avanços para a lógica modal, tais como Stig Kanger, Richard Montague e Jaakko Hintikka e Saul Kripke, cuja contribuição proporcionou a criação da semântica para os sistemas modais – a semântica dos mundos possíveis, ou semântica de Kripke –, avanço este que causou grande impacto no âmbito da filosofia analítica. Em 1965, Saul Kripke estabeleceu o sistema modal normal mínimo ‘K’. (KRIPKE, 2001, p.11)

Para Mortari, a lógica modal só veio a surgir no século XX, por meio dos trabalhos de Rudolf Carnap e Ruth Barcan Marcus, pioneiros em publicar, nos anos de 1946-47, sistemas axiomáticos de lógica modal quantificada que combinavam a lógica de predicados com a lógica proposicional de C. I. Lewis; enquanto isso, Carnap tentou recuperar a ideia leibniziana de conceber verdades necessárias como verdades em todos os mundos possíveis. (MORTARI, 1980, p. 357).

Na década de 60, tivemos ainda a relevante contribuição de Lemmon, com a apresentação de uma síntese da completude algébrica para os sistemas modais, assim como para a semântica dos mundos possíveis de Saul Kripke. Como resultado da sua pesquisa, demonstrou que a completude semântica pode ser deduzida de resultados algébricos por meio de um teorema central. Um dos mais interessantes resultados foi o seu teorema da representação, cuja consequência para a lógica modal consistiu na conexão entre o ponto de vista algébrico e o ponto de vista da semântica dos mundos possíveis (ou semântica de Kripke). (GORSKY,2008, p.102).

Essa lógica modal de que tratamos aqui tem o seu adjetivo modal oriundo da expressão 'modos de verdades'; ela é 'alética', por ter origem no vernáculo grego 'alethea' (αληθεια), cujo significado é 'verdade'. A ideia é que uma proposição, além de ser contingentemente verdadeira ou falsa, pode ser ainda necessária (ou necessariamente verdadeira) ou impossível (necessariamente falsa). Segundo Mortari, esta é uma lógica que contém apenas símbolos não-lógicos, de apenas predicados zero-ários. (MORTARI, p. 356).

A partir do presente momento, neste segundo capítulo de nosso trabalho, nos deteremos estritamente na lógica proposicional modal e, em específico, na sintaxe para a lógica proposicional modal.

2.2 Cálculo Proposicional Modal

A lógica modal é uma extensão da lógica clássica, acrescentando dois novos operadores lógicos: o de 'necessidade' e o de 'possibilidade', representados por: □ (quadrado) e ◊ (losango), respectivamente. Nas seções **2.2.1** e **2.2.2**, faremos uma exposição dos elementos básicos da lógica modal proposicional. Na seção **2.2.3,** indicaremos como um sistema particular de lógica modal **S5** está relacionado com as questões sobre demonstrabilidade no sistema **K,** que consideraremos no capítulo 3. Essa conexão motiva o exame mais detalhado de **S5,** que empreenderemos nas seções **2.4 e 2.5.**

2.2.1 Linguagem, axiomas e regras

Ao definirmos uma linguagem de uma teoria lógica, o primeiro passo é o de especificar o conjunto de símbolos que serão utilizados; na segunda etapa, vamos estabelecer critérios rigorosos a fim de definir, a respeito das expressões formadas por esses símbolos, quais são as fórmulas 'bem-formadas' e quais aquelas que não são.

Seja L uma linguagem que consiste de:

- Conectivos lógicos: ~, ^, ˅, →, ↔
- Operadores modais: □, ◊

- Letras proposicionais: A, B, C, D, ...
- Símbolo de pontuação: ( ) ,

Uma fórmula 'bem-formada' (fbf) é construída a partir de um alfabeto, ou seja, de um conjunto de caracteres, tendo como parâmetro que a expressão de uma linguagem é qualquer sequência finita de símbolos dessa linguagem.

A lógica proposicional considera dois tipos de fórmulas: as atômicas e as moleculares, que são construídas com base nas atômicas usando operadores.

As fórmulas obedecem às seguintes cláusulas:

i. Se A, B, C, ... são letras proposicionais, então, cada letra é uma fórmula atômica;
ii. Se α e β são fórmulas quaisquer, então $\sim\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, são fórmulas moleculares (ou compostas);
iii. Nada além das cláusulas (i) e (ii) será uma fórmula.

Os operadores modais de 'necessidade' e 'possibilidade' podem ser inter definíveis pelas seguintes equivalências:

- Necessário $\alpha \leftrightarrow$ não possível não α: $\Box\alpha \leftrightarrow \sim\Diamond \sim\alpha$
- Possível $\alpha \leftrightarrow$ não possível não α: $\Diamond\alpha \leftrightarrow \sim\Diamond\alpha$
- Não necessário $\alpha \leftrightarrow$ possível não α: $\sim \Box\alpha \leftrightarrow \Diamond \sim\alpha$
- Não possível $\alpha \leftrightarrow$ necessário não α: $\sim \Diamond\alpha \leftrightarrow \Box \sim\alpha$

Além dos operadores 'necessário' e 'possível', podemos definir também:

- Contingente[26] $\alpha \leftrightarrow$ possível α e possível não α: $\nabla\alpha \leftrightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\sim\alpha)$
- Impossível $\alpha \leftrightarrow$ não possível α: $\sim\Diamond\alpha$

E, a partir dessas equivalências acima, podemos estabelecer as seguintes relações:

- α é possível (consistente, pode ser verdadeiro), isto é, aquilo que é consistente não pode ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo.
- α é necessário (deve ser, há de ser verdadeiro)

[26] Embora o operador de contingência não pertença à linguagem do CPM, aqui, por interdefinição, utilizaremos o símbolo '∇' para designar contingência.

- α é impossível (contraditório)
- α e β são inconsistentes (não é possível que α e β sejam ou ambas verdadeiras)[27]

Vale ressaltar que devemos obedecer à ordem das palavras e operadores[28], ou seja:

Necessário não $\alpha \leftrightarrow \Box \sim \alpha$

Não necessário $\alpha \leftrightarrow \sim \Box\, \alpha$

Possível não $\alpha \leftrightarrow \Diamond \sim \alpha$

Não possível $\alpha \leftrightarrow \sim \Diamond\, \alpha$

O sistema axiomático mais usual para a lógica clássica é o do Mendelson[29], dado pelos seguintes esquemas de axiomas e regras:

Se A, B, C são fbfs, quaisquer de L então os seguintes são axiomas de L.

(A1) $(A \to (B \to A))$

(A2) $(A \to (B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C))$

(A3) $(\sim B \to \sim A) \to ((\sim B \to A) \to B)$

Regra de Modus Ponens (MP):

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \therefore \beta \end{array}$$

2.2.2 Sistema Modal S5

O Sistema S5 é um sistema modal com linguagem, axiomas e regras próprias. Há, em sua composição, consequências sintáticas, teoremas de dedução, de consistência, de conjunto

---

27 A posição do operador de negação '$\neg$' entre o operador de possibilidade '$\Diamond$'e a letra 'α', na segunda parte da conjunção abaixo, gera uma contingência (Contingência: $\Diamond\alpha \wedge \Diamond \neg\alpha$). A posição do operador de negação '$\leftarrow$' frente do operador de possibilidade '$\Diamond$'e a letra sentencial 'α', na segunda parte da conjunção abaixo, gera uma impossibilidade ou contradição. (Impossibilidade/contradição: $\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha$).

28 GENSLER, Harry. *Introdução à lógica*, Trad. Christian M. Amorim. São Paulo: Paulus, 2016, p. 276.

29 MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical logic*. 6ª ed. 2015, p. 28.

satisfatível e de métodos de provas por dedução natural, além do método de construção de modelo, que o caracterizam.

Kripke, em seu artigo[30] de 1963, apresenta uma análise semântica da lógica modal para o Cálculo Proposicional Modal, no qual ele estende o cálculo proposicional clássico para a classe modal do sistema denominado ‘normal’, que veremos na seção **2.5.2.** Esta classe inclui os sistemas M e S4, bem como o S5.

Para Kripke, o Cálculo Proposicional Modal (CPM) é dado por uma lista de letras proposicionais P, Q, R, ..., conectivos ∧, ~, □, fórmulas-bem-formadas (fbfs), conforme já dito na seção **2.2.1.**

Um cálculo proposicional modal é chamado de normal se, e somente se, contém como teoremas os esquemas de axiomas A1 e A3, e contém como regras deriváveis admissíveis as duas regras de inferente R1 e R2.

(A1)	Sistema ***K***	□ (A→B) → (□A → □ B) (axioma da necessidade)
(A2)	***T***	□A → A (axioma da reflexividade)
(A3)	***S5***	◊A → □◊A (axioma da euclidianidade)
(A4)	***S4***	□A → □□A (axioma da transitividade)
(A5)	***B***	A → □◊A (axioma da simetria)

Regras:

(R1) A, A → B ⊦ B (regra Modus Ponens)

(R2) A → □A (introdução do necessário)

As suas regras de inferências são:

Modus Ponens: A → B, A ⊢ B

Necessitação: ⊢ A, ⊢ □A

[30] KRIPKE, S., *Semantical Analysis of Modal Logic I – Normal Modal Propositional Calculi.* In: *Zeitschrm F, Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 9*. 67-96 (1963).

Os sistemas não normais, a serem considerados em outro artigo, falharão em satisfazer R2 no artigo sobre extensões quantificacionais; também consideraremos sistemas que não são normais no sentido de que são modificados na direção de Q. Prior. (KRIPKE, 1963, p. 67).

Na seção a seguir, apresentaremos algumas definições, teoremas e propriedades sintáticas e semânticas necessárias para a compreensão do capítulo 3.

2.3 Definições: teoremas e propriedades sintáticas

A noção de consequência lógica envolve a definição de fórmulas válidas, que são aquelas verdadeiras em toda e qualquer estrutura. Essas fórmulas podem ser definidas como aquelas que são consequência lógica do conjunto vazio de premissas. Caracterizando consequência lógica de uma maneira sintática, obtém-se algo similar, que são os teoremas.

Definição de teorema

Uma fórmula α é um teorema do *Cálculo Proposicional Clássico* (abreviado por CPC), se existe uma dedução de α a partir do conjunto vazio de premissas. Assim, α é um teorema do CPC, se e somente se, $\emptyset \vdash \alpha$, o que abreviamos por $\vdash \alpha$. (MORTARI, 2016, p. 281; 285).

Definição de Consequência sintática

Dizemos que a fórmula α é uma consequência sintática do conjunto de fórmulas Γ se existe uma dedução de α a partir de Γ, isto é, representado por $\Gamma \vdash \alpha$ (lê-se α é deduzido a partir de Γ). (MORTARI, 2001, p. 243)

2.3.1 Teorema da Dedução (TD)

O enunciado do TD demonstrado pela 1ª vez por Herbrand, em 1930, é o seguinte:

"Se Γ é um conjunto de *fbfs* e A e B são *fbfs* e Γ, A $\vdash$ B então $\Gamma \vdash A \to B$".

Em particular, se A $\vdash$ B então $\vdash A \to B$.

Observações:

(1) Γ, A $\vdash$ B é a dedução dada de B a partir de Γ, A.

A dedução dada (ou hipótese do teorema) diz que existe uma sequência de fbfs $B_1, \ldots, B_n$ tal que cada B_i ou é uma das fbfs de Γ, ou a fórmula A, ou um axioma, ou uma consequência imediata de fbfs precedentes por Regras de Inferência (neste caso, Modus Ponens); e a última fbf da sequência é a fbf B (isto é, $B_n = B$).

(2) $\Gamma \vdash A$ é a dedução resultante de $A \rightarrow B$ a partir de Γ.

A dedução resultante (ou conclusão do teorema) diz que existe uma sequência finita de fbfs $B_1, ..., B_n$ onde cada fbf da sequência, isto é, dada B_i é ou umas das fbfs de Γ, ou um axioma, ou uma consequência imediata por Regra de Inferência (neste caso M.P.) de fbfs precedentes da sequência; e a última fbf da sequência é $\vdash A \rightarrow B$ (isto é, $B_n = A \rightarrow B$).

Na próxima seção, apresentaremos o método de prova por *tablô*, que utiliza um procedimento de dedução, o qual servirá de base para explicar os modelos normais de Kripke, na seção 2.5.2.

Para um melhor entendimento acerca dos tablôs semânticos de Kripke, recordemos um pouco o que são tablôs e como são construídos.

2.4 Tablô: método, regras e propriedades

> A história dos tablôs semânticos começou em 1935 com Gerhard Gentzen, que criou sistemas de prova conhecidos hoje como cálculos dos sequentes. A característica deste sistema é que eles obedecem à chamada propriedade das subfórmulas: ou seja, na prova de que alguma fórmula α é válida, precisamos apenas considerar as subfórmulas de α. Este trabalho de Gentzen foi depois desenvolvido por E. Beth e Raymond Smullyan, como nos exemplos de tablôs que apresentaremos mais adiante. (MORTARI, 2001, p. 197).

O método de tablô semântico (também chamado de árvore de refutação) permite mostrar a validade de uma fórmula, ou determinar se ela é consequência lógica de um conjunto de fórmulas.

A principal característica dos tablô é que ele é um método de refutação, ou seja, para mostrar que alguma fórmula α é válida, começamos supondo que ela não o é. Se isto nos levar a algum absurdo, então, a suposição inicial estava errada. Caso contrário, os tablôs nos darão imediatamente um contraexemplo para a fórmula α em questão.

As noções que estão por trás dos métodos de provas, incluindo os tablôs, contemplam as definições de teorema, dedução, satisfação, estrutura e regras. Para estas definições, seguiremos o livro *Introdução à Lógica* de César Mortari. (2001).

Na prova por tablô, para mostrar que uma fórmula é válida, basta mostrar que a sua negação é sempre falsa.

Para cada tipo de fórmula molecular, teremos duas regras: uma para tratar do caso em que ela é precedida de V, e outra para o caso em que é precedida por F. Em alguns casos, isso levou a uma bifurcação do tablô, como V (A→B). Em outros casos não, como F (A→B).

As regras de construção de tablô, que envolvem as fórmulas moleculares, são também conhecidas como regras de expansão porque o resultado de aplicá-las produz um acréscimo de novas fórmulas ao tablô.

Para cada operador temos duas regras, e nessas regras podemos distinguir dois casos:

i. Algumas vezes há apenas uma maneira possível de assinalar valores a subfórmulas, por exemplo, quando temos uma conjunção verdadeira $\alpha \wedge \beta$: ambos os conjuntivos devem ser verdadeiros, se a conjunção o é. Assim, entendemos o tablô adicionando Vα e Vβ.
ii. Contudo, algumas vezes temos duas possibilidades: uma implicação verdadeira $\alpha \to \beta$, por exemplo, deve ter ou o antecedente falso, ou o consequente verdadeiro.

De forma a considerar ambas as possibilidades, o ramo em que estamos trabalhando deve ser dividido em dois novos ramos, cada um deles representando uma maneira de continuar (uma atribuição possível).

Os ramos podem dividir-se adicionalmente em sub-ramos, e sub-sub-ramos; esta, aliás, é a razão pela qual o tablô se assemelha a uma árvore invertida. Por esta razão, os tablôs são também denominados de árvores de refutação.

2.4.1 Regras de Construção De Tablôs[31]

$$\frac{V\ \neg\alpha}{F\alpha} \qquad \frac{F\ \neg\alpha}{V\alpha} \qquad \frac{V\ \alpha \wedge \beta}{\begin{array}{c} V\alpha \\ V\beta \end{array}} \qquad \frac{F\ \alpha \wedge \beta}{F\alpha \quad F\beta}$$

---

[31] MORTARI, *Introdução à Lógica,* 2001, p. 204.

V α ∨ β

Vα Vβ

F α ∨ β

Fα

Fβ

V α → β

Fα Vβ

F α → β

Fα Fβ

V α ↔ β

Vα Fα
Vβ Fβ

V α → β

Vα Fα
Fβ Vβ

2.4.2 Exemplos de tablôs[32]

1) Suponhamos que você pretenda demonstrar que a fórmula (**A ∧ B)** → **(A ∨ B)** é uma fórmula válida.
   i. Suponha, por absurdo, que a fórmula não seja válida, isto é, deve haver alguma coisa na estrutura dela que a torne falsa, ou seja:

   F ((A ∧ B) → (A ∨ B))

   ii. A fórmula acima é uma condicional, e só há um caso no qual uma implicação α →β, é falsa: quando o seu antecedente α é verdadeiro, e seu consequente β é falso.
   iii. Para essa fórmula condicional ser falsa, o antecedente (A ∧ B) é verdadeiro (V), e o consequente (A ∨ B) é falso (F).

   Então, a construção do tablô (ou árvore) é a seguinte:

Exemplo 1

✓ F ((A ∧ B) → (A ∨ B))[33]

V A ∧ B

F A ∨ B

[32] MORTARI, *Introdução à lógica*, 2001, p. 199-202.

[33] Colocamos *a marca de verificação* ao lado da fórmula para significar que ela foi usada. E que não precisamos mais nos ocupar com ela. Podemos dizer também, com relação a isto, que esta fórmula foi processada ou reduzida. (MORTARI, 2001, p. 199).

O modo que o autor Mortari utiliza para construir o tablô consiste em desmembrar a fórmula condicional, chamando cada uma das partes de ramos:

Ramo esquerdo:

✓ F $((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
✓ V $A \wedge B$
F $A \vee B$
V A
V B

Ramo direito:

✓ F $((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
✓ V $A \wedge B$
✓ F $A \vee B$
V A
VB
F A
F B
X

FIGURA 01: Tablô I - MORTARI (2001, p. 199)

Explicação do tablô do exemplo 01:

Para o antecedente da fórmula condicional, temos que a conjunção $(A \wedge B)$ é verdadeira; se ambas, A e B são verdadeiras.

O consequente da fórmula condicional $(A \vee B)$ é falsa, se cada parte da disjunção for falsa, e não há mais fórmulas para se reduzir. Assim, podemos verificar que há inconsistências ou contradições nesse tablô, pois temos: que A é verdadeiro em um ramo, e em outro é falso, ao mesmo tempo.

Portanto: a nossa suposição de que a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ poderia ser falsa em uma estrutura nos levou a uma contradição. Sendo assim, por absurdo, a fórmula não pode ser falsa. Logo, ela é válida.

Quando utilizamos o método de prova por tablô, recorremos à redução ao absurdo, ou seja, refutamos àquela fórmula que desejamos descobrir se é válida ou não. Então partimos do pressuposto de que a fórmula não é válida, e prosseguimos com as devidas derivações, desmembrando e avaliando os valores de verdade das subfórmulas.

Vejamos agora um outro exemplo de fórmula inválida:

Exemplo 2

$((A \wedge B) \rightarrow C)$

Modelo de construção proposto por Mortari

Ramo esquerdo:	Ramo direito:
✓ F $(A \wedge B) \rightarrow C$	✓ F $(A \wedge B) \rightarrow C$
V $A \wedge B$	✓ V $A \wedge B$
F C	* F C
	V A
	V B
	?

FIGURA 02 - Tablô II – MORTARI (2001, p. 200)

Vamos começar o tablô supondo que a fórmula é inválida, ou seja, F $(A \wedge B) \rightarrow C$. Se a fórmula condicional é falsa, então o seu antecedente é verdadeiro e seu consequente é falso.

Se o antecedente é verdadeiro, isto é, $(A \wedge B)$ é V, então A e B são verdadeiros. Percebemos que não ocorre nenhum absurdo, ou seja, não há nenhuma fórmula α no tablô tal que se evidencia a ocorrência de ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Apesar de todas as fórmulas moleculares terem sido utilizadas, não há nada a fazer. Deste modo, como não chegamos a uma inconsistência, a hipótese de que $((A \wedge B) \rightarrow C)$ não fosse válida estivesse correta estava errada mesmo.

Podemos concluir que: $(A \wedge B) \rightarrow C$ é inválida.

Exemplo 3

$(((Pa \rightarrow Pb) \wedge {\sim} Pb) \rightarrow {\sim}Pa)$

Para demonstrar que esta fórmula é válida, como de praxe, iniciamos pela suposição de que essa fórmula pode ser falsa em alguma estrutura. Assim, consideremos que a fórmula F $(((Pa \rightarrow Pb) \wedge {\sim} Pb) \rightarrow Pa$ é falsa, ou seja, a implicação é falsa, se o antecedente é verdadeiro e o seu consequente é falso.

Ramo esquerdo	Ramo direito
✓ F (((Pa → Pb) ∧ ~Pb) → ~Pa	✓ F (((Pa → Pb) ∧ ¬Pb) → ~Pa
✓ V (Pa → Pb) ∧ ~Pb	✓ V (Pa → Pb) ∧ ~Pb
F ~Pa	✓ F ~Pa
V Pa → Pb	V Pa → ~Pb
V ~Pb	✓ V Pb
	V Pa
	F Pb

FIGURA 03 - Tablô III – MORTARI – Parte I (2001, p. 202)

E como esse antecedente é uma conjunção verdadeira, então temos que cada uma das partes da conjunção é verdadeira.

Em seguida, se o consequente ~ Pa é falso, então Pa é verdadeiro, e se ~ Pb é verdadeiro, então Pb é falso. Assim, se Pa é verdadeiro e Pb é falso, então isso não caracteriza uma inconsistência, e, portanto, não podemos fechar este tablô.

Contudo, ainda há uma fórmula não utilizada (V Pa → V Pb), e as coisas ficam mais complicadas porque não há um só caso no qual haja um único caso de implicação verdadeira. Mas temos uma cláusula que nos diz que:

$$\mathcal{A}\,(\alpha \rightarrow \beta) = \mathrm{V} \text{ sse } \mathcal{A}\,(\alpha) = \mathrm{F} \text{ ou } \mathcal{A}\,(\beta) = \mathrm{V}$$

Isto é, se uma implicação (α → β) é verdadeira (numa estrutura, numa valoração), se, ou α é falsa, ou β é verdadeira. O próximo passo é construir o tablô fazendo uma bifurcação, ou ramificação, porque passaremos a ter duas continuações possíveis para o tablô, ou seja, dois ramos, dos quais todas as sete fórmulas anteriores lhes são parte em comum.

✓ F ((Pa → Pb) ∧ ~Pb) → ~Pa

✓ V (Pa → Pb) ∧ ~Pb

✓ F ~Pa

✓ V Pa → Pb

✓ V ~Pb

V Pa

F Pb

F ~Pa

F Pa V Pb

X X

FIGURA 04 - Cont. Tablô III – MORTARI – Parte II (2001, p. 202)

O ramo da esquerda F Pa e o ramo da direita V Pb nos assinalam que existem duas possibilidades para tentarmos mostrar que a fórmula inicial é falsa. Mas esse tablô apresenta uma inconsistência em cada um dos seus ramos: no ramo da esquerda, temos V Pa, e logo abaixo eis que surge F Pa, o que nos leva a entender que o ramo se fechou, e que por ele não podemos mais continuar. De forma similar, o ramo direito também apresenta outra inconsistência: F Pb, e logo abaixo, V Pb, e também se fechou. Portanto, os dois ramos se fecharam, e nenhuma das possibilidades pode nos levar a um contraexemplo para ((Pa → Pb) ∧ ~Pb) → ~Pa, o que nos mostrou que a hipótese inicial de que a fórmula era inválida estava errada, e assim se segue, que realmente é válida. (MORTARI, 2001, P. 198-203).

2.4.3 Propriedades dos tablôs: decidibilidade, consistência e completude

Dizemos que o sistema é **decidível** quando existe um algoritmo que determina se os argumentos são válidos ou não. Os tablôs, que consistem em um dos métodos de prova, garantem a decidibilidade da lógica proposicional, e, portanto, são mais eficazes que as tabelas verdade.

- Um conjunto de fórmulas bem formadas é **consistente** se todas as suas árvores contêm, pelo menos, um ramo aberto.

- Se uma árvore **completa** não contém ramos abertos, as fórmulas, a partir das quais a árvore foi construída, são inconsistentes. Se a árvore completa, para uma só fórmula, não tem ramos abertos, então a fórmula é inconsistente.

Neste capítulo 2, explicitamos a sintaxe do cálculo proposicional modal e apresentamos o método de provas por tablôs semânticos. Nosso objetivo foi expor os sistemas axiomáticos modais (que incluem: linguagem, regras e axiomas) utilizados por Kripke para construção da semântica modal, de que trataremos no capítulo 03.

Assim, com a finalidade de explicar a linguagem e o método de provas por tablôs para esses sistemas modais, decidimos apresentar a comparação de construções de tablôs tradicional (cf. Mortari) e o simplificado (cf. a nossa construção).

Sabe-se que existem outros métodos de provas, tais como: dedução natural, método de sequentes e estrutura de modelos, mas neste capítulo, além dos tablôs, apresentamos o modelo de estrutura normal de Kripke, que serviu de suporte para compreensão das propriedades de completude, decidibilidade e consistência pelos métodos de tablôs e sequentes.

Para finalizar este capítulo, apresentamos a aplicação da propriedade de decidibilidade a tablôs semânticos modais, feita por Kripke. Todo o conteúdo do sistema axiomático, estruturas e teoremas contidos neste capítulo servirão para o que nos resta agora a fazer, que é explicar tal aplicação para as estruturas de modelos normais do cálculo proposicional modal.

CAPÍTULO 3

SEMÂNTICA RELACIONAL

Neste capítulo, moveremos a nossa atenção para um novo prisma com o objetivo de apresentar os conceitos de estruturas, modelos e tablôs para a construção da semântica das lógicas modais, em específico a Semântica de Kripke. Ao longo deste capítulo, mostraremos uma estrutura de modelo normal (considerada por Kripke como uma semântica relacional) para o cálculo proposicional modal.

Nos capítulos anteriores, vimos as noções dos elementos da teoria da referência causal de Kripke, assim como a sintaxe para a lógica proposicional modal. Como uma sequência hierarquicamente lógica, buscamos trazer em primeira instância a teoria da referência causal de Kripke, contida na obra *O Nomear e a Necessidade* (2012). Em seguida, trouxemos a definição da linguagem através da sintaxe do cálculo proposicional modal, para dar arcabouço teórico a fim de abordarmos, por último, a estrutura de modelo normal de Kripke.

Percorrer este trajeto didático-metodológico nos foi necessário para que criássemos a condição elementar de colher subsídios teóricos para a construção da relação existente entre a teoria da referência causal apresentada no capítulo 1, fundamentada pelo arcabouço conceitual que nos mostra a linguagem a ser utilizada e, no capítulo 3, a estrutura de modelos normais de Kripke, bem como os tablôs semânticos e a relação existente entre a teoria da referência causal e a estrutura de modelos de Kripke.

Vejamos agora as definições essenciais que proporcionarão à lógica modal uma semântica que tem se estabelecido, por sua relevância, entre as áreas da ciência da computação.

3.1 Estruturas e modelos semânticos

Antes de falarmos de estrutura e modelos, abordaremos um pouco sobre teoria de modelos, que é uma das áreas da lógica matemática que estuda esses conceitos.

Segundo Chang e Keisler, a teoria de modelos é um ramo da lógica matemática que lida com a relação entre uma linguagem formal e suas interpretações ou modelos. E temos, assim como a teoria clássica dos modelos, a teoria de modelos da lógica de predicados de primeira ordem.

Esses autores afirmam que modelo é uma estrutura do tipo das estruturas comuns à matemática, como por exemplo o campo de números reais; a estrutura parcialmente ordenada que consiste em todos os conjuntos de números inteiros ordenados por inclusão. Estes modelos, quando estudados de modo uniforme e sem considerar as linguagens formais, permanecem na área conhecida como álgebra universal. Uma linha difusa faz a separação entre a álgebra universal e a teoria dos modelos, portanto, vamos considerar aqui como é exposto por Chang e Keisler (ano): álgebra universal + lógica = teoria dos modelos.

Para se chegar à teoria dos modelos, se faz necessário definir uma linguagem formal, sendo esta a lógica de primeira ordem com identidade, além de uma lista específica de símbolos e regras pelas quais as sentenças poderão ser construídas a partir desses símbolos.

Deste modo, o propósito da linguagem formal para a teoria de modelos é o de tornar possível dizermos coisas sobre os modelos através das sentenças dadas pela linguagem formal. E isto somente é obtido por meio de uma função básica da verdade, que especifica, para cada par formado por uma sentença e um modelo, um dos valores de verdade que a linguagem formal obtém as suas interpretações a partir dos modelos dados.

A teoria dos modelos estuda as relações entre linguagens formais, por um lado, e suas realizações ou interpretações, ou modelos, por outro lado. A ponte que vincula a linguagem formal com as interpretações é a definição da verdade, introduzida por Tarski.

A pergunta natural que podemos fazer é: que tipos de teoremas são provados pela teoria de modelos?

Os teoremas da compacidade, da eliminação dos quantificadores, além do teorema de Skolem-Löwenheim.

Mas e quanto à noção de estrutura? O que poderíamos dizer a respeito do modo como podemos interpretar o sentido para a 'estrutura'?

Os conceitos de modelo e estrutura nasceram no âmbito da matemática, e é desta área que cooptaremos o significado para a noção de 'estrutura'. Com base na noção de modelos que Chang e Keisler nos dão, assim como na noção de estrutura encontrada no âmbito da lógica matemática, podemos deduzir então que: um modelo é uma estrutura composta por um conjunto universo e por constantes, relações e funções definidas no conjunto universo.

Vejamos abaixo as definições formais:

Definição 3.1: (Estrutura) Uma estrutura é um par ordenado <*W*, *R*>, onde *W* é um conjunto cujos elementos são proposições e *R* um conjunto de pares {*x, y*}, onde *x* e *y* pertencem a *W*. O par (*x*, *y*) será representado pela notação *xRy,* que será chamada de relação entre os elementos *x* e *y*. Podemos dizer que, na estrutura *E*, *x* se relaciona com *y*. (COSCARELLI, 2008, p. 32).

Definição 3.2: (Modelo) Seja *P* um conjunto cujos elementos são chamados proposições elementares (ou, simplesmente, proposições), e seja *S* um conjunto cujos elementos são subconjuntos de *W*, e *V* uma função de *P* em *S*. Seja ainda (*W*, *R*) uma estrutura. Um modelo é uma tripla ordenada do tipo <W, *R, V*>.

As proposições elementares serão representadas por letras latinas minúsculas e letras latinas maiúsculas, ou letras gregas, para as fórmulas bem formadas. Assim, *V* (*p*) é o conjunto de fórmulas bem formadas onde vale a proposição *p.*

Antes de dar sequência, uma observação faz-se necessária sobre a notação: quando citarmos um modelo *M* ou *M'*, estaremos tacitamente nos referindo ao modelo *M* = <*W, R, V*> ou *M'* = <*W', R', V'*>. Usaremos sistematicamente esta notação.

Mais adiante apresentaremos uma estrutura de modelos normais a partir dessa tripla ordenada. Antes disso, exibiremos os elementos sintáticos do cálculo proposicional modal, a serem utilizados nessa tripla ordenada.

3.3 Definição de estrutura

Definimos uma estrutura $\mathfrak{A}$ em uma linguagem *L* como sendo um par ordenado < A, I > em que 'A', o Universo, é o conjunto não vazio e contável (Mortari convencionou 'contável'), e uma função interpretação I. (MORTARI, 2001, p. 173).

As condições de verdade (V ou F) para as fórmulas em uma estrutura A são:

(a) $\mathfrak{A}$ (S) = V sse I (S) = V, onde S é um símbolo de predicado zero-ário;

(b) $\mathfrak{A}$ ($Pt_1, \ldots t_n$) = V sse < I(t_1), ... I (t_n) >∈ I (P), onde P é um símbolo de predicado n-ário, para n > 0, e t_1, ..., t_n são parâmetros;

(c) $\mathfrak{A}$ (¬α) = V sse *A* (α) = F;

(d) $\mathfrak{A}$ (α ∨ β) = V sse *A* (α) = V ou *A* (β) = V;

(e) $\mathfrak{A}$ $(\alpha \wedge \beta) = V$ sse A $(\alpha) = V = A$ $(\beta) = V$;

(f) $\mathfrak{A}$ $(\alpha \rightarrow \beta) = V$ sse A $(\alpha) = F$ ou A $(\beta) = V$;

(g) $\mathfrak{A}$ $(\alpha \leftrightarrow \beta) = V$ sse A $(\alpha) = V = A$ $(\beta) = V$;

(h) $\mathfrak{A}$ $(\forall x\alpha) = V$ sse A $(\alpha[x/i]) = V$, para todo parâmetro de i;

(i) $\mathfrak{A}$ $(\exists x\alpha) = V$ sse A $(\alpha[x/i]) = V$, para algum parâmetro de i;

Uma estrutura, portanto, teria o propósito de especificar os valores semânticos desejados, a fim de determinar se as fórmulas são verdadeiras ou falsas na estrutura. (MORTARI, 2008, P. 51).

Quando especificamos esses valores semânticos, podemos então definir a consequência lógica por meio das estruturas.

Ao construir uma estrutura A para uma linguagem de primeira ordem L, seguimos as seguintes etapas:

1. Delimitamos o domínio das entidades sobre as quais estamos falando, ou seja, determinamos que indivíduos existem nesta estrutura específica; O domínio das entidades é denominado de Universo do Domínio ou Domínio da Estrutura. Mortari convenciona representar as letras das estruturas por meio de letras góticas. Determinamos também que o Universo de uma estrutura é um conjunto não vazio. Esta é a única restrição feita à construção de uma estrutura.
2. O Universo de uma estrutura contém conjuntos quaisquer (pode ser um conjunto de humanos, um conjunto de gatos, um conjunto de números inteiros, um conjunto de números racionais, etc.). Então, como poderemos interpretar as expressões básicas da linguagem? Como lhes dar um valor semântico? A resposta é: através de uma função de interpretação IA.
3. A função de interpretação associa as constantes não lógicas de uma linguagem L à estrutura A.
4. Assim, temos dois elementos numa estrutura: o Universo de uma estrutura e a sua função de interpretação.

Com base nestas definições, podemos tratar do cálculo proposicional modal normal que Kripke traz em seu artigo de 1963.

3.4 O cálculo proposicional modal normal

O cálculo proposicional modal (CPM) é dado por uma lista infinita e enumerável de letras proposicionais P, Q, R, que podem ser combinadas usando os conectivos ∧, ~, □ para formar *fórmulas bem formadas* (fbfs), tais como no artigo de Kripke (1959). (As letras proposicionais são, portanto, fórmulas atômicas do sistema. Abaixo, usaremos as letras P, Q, R, ..., como metavariáveis variando como fórmulas atômicas. A, B, C, ..., são metavariáveis sobre fórmulas arbitrárias). O cálculo proposicional modal é chamado normal se e somente se contém como teoremas os esquemas de axiomas A1 e A3 (do artigo de 1959), e se contém duas regras de inferência: R1 e R2.

(A1) $\Box A \rightarrow A$ (Axioma T da Reflexividade)

(A3) $\Box (A \rightarrow B) .\rightarrow. (\Box A \rightarrow \Box B)$ (Axioma da Necessitação)[34]

(R1) Se $\vdash A$ e $\vdash (A \rightarrow B)$, $\vdash$ então B (Modus Ponens)

(R2) Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$. (Introd. da regra de inferência do Necessário)

(Os sistemas não normais são considerados em outro artigo que falhará para satisfazer R2; no outro artigo sobre extensão quantificacional, nós consideraríamos os sistemas no sentido que eles são modificados na direção do sistema Q de Prior).

O sistema M (T) de FEYS-VON WRIGH[35] é dado pelos axiomas (A1) e (A3), e as regras R1 e R2. O sistema S4 é obtido adicionando ao M o axioma (A4) $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$ como um esquema de axioma. O esquema de axioma de Brouwersche é dado por:

$$A \rightarrow \Box\Diamond A$$

E o seu sistema de Brouwersche é obtido adicionando ao esquema acima o sistema M de Feys-Von Wright.

---

[34] No axioma 3, Kripke utiliza a notação ‘. → .’para denotar ‘implica semanticamente’, isto quer dizer: “Dizemos que uma fórmula *B* é implicada semanticamente pelas fórmulas $A_1, A_2, ..., A_n$,se e somente se, $A_1 \wedge A_2 \wedge, ..., A_n . \rightarrow . B$. Kripke (1959, p. 3)

[35] G. H. VON WRIGHT. *An essay in modal logic*. North-Holland, 1951.
R. FEYS. *Les nouvelles logiques des modalités.* In. Revue neoscolastique de philosophie 40 (1937), 517-663 e 41 (1938). 217-252.

Finalmente, S5 será definido como no artigo de Kripke de 1959, isto é, ele é o sistema M mais o esquema:

$$(A2) \sim \Box A \rightarrow \Box A \sim \Box A$$

Sabe-se que Lewis provou que S4 somado ao axioma de Brouwersche é equivalente ao S5. Neste artigo, mostraremos mais claramente este teorema. Além disso, provaremos que as relações de partições são campos de classes de equivalências disjuntas: reflexiva, transitiva e simétrica.

No âmbito do cálculo proposicional modal, temos as estruturas de modelos normais, que passaremos a conhecer, bem como a sua condição de validade e de satisfatibilidade para as fórmulas dos sistemas modais.

3.5 Modelos Normais

Uma *estrutura de modelo normal* (abreviada por e.m.n.) é uma tripla ordenada (G, K, ***R***)[36] onde K é um conjunto não vazio, G ∈K e ***R*** é uma relação reflexiva definida em K. Se ***R*** é transitiva, chamamos essa e.m.n. de *estrutura de modelo* S4; se *R* é simétrica, então, chamamos ela de estrutura de modelo de Brouwersche; se ***R*** é uma relação de equivalência, então a chamamos de uma *estrutura de modelo* S5. A estrutura de um modelo normal é também chamada de uma estrutura de modelo *M*. Neste artigo, o adjetivo ‘normal’ será muitas vezes omitido, e nós falaremos simplesmente de estrutura de modelo abreviada por (e.m.). (KRIPKE, 1963, p. 68).

Uma estrutura de modelo *M* (constituída pelos sistemas S4, S5 e o de Brouwersche), para fbf[37] *A* de *M* é uma função binária *Φ* (*P*, H)[38] associado com o sistema dado *M* da estrutura de modelo (G, K, ***R***). A primeira variável ‘P’ abrange a subfórmula de *A*, e a segunda variável ‘H’ abrange os elementos de K. A classe de *Φ* é o conjunto, isto é, {V, F}; isto é, *Φ* (*P*, H) = V ou *Φ* (*P*, H) = F.

[36] Sendo K um conjunto de mundos possíveis, com um elemento G denominado como mundo real. A proposição será necessariamente se e somente se ela for verdadeira em todos os mundos possíveis.

[37] Cada fórmula atômica *A* é atribuída a um valor verdade em cada mundo H.

[38] A função binária *Φ* (P, H) é uma função auxiliar *Φ* para atribuir um valor verdade a P, no mundo H. Mais detalhes a respeito desta função serão explicados no capítulo 3. (uma vez que esta função interpreta a semântica dos modelos possíveis de Kripke).

Considerando a função binária *Φ,* associada à estrutura de modelo (G, K, ***R*),** definiremos para qualquer subfórmula *B* de *A*, e qualquer H ∈ K, um valor *Φ* (*B*, H) (que pode ser V ou F), isto é, cujo primeiro argumento alcança toda a subfórmula de *A*, e não simplesmente as subfórmulas atômicas. Se *B* é atômico, (isto é, letra proposicional), o seu valor correspondente já foi definido. Para as fórmulas mais complexas, definimos a valoração por indução sobre o número de conectivos na fórmula.

Assumindo que *Φ* (*B*, H) e *Φ* (*C*, H), e por definição, temos que H ∈ K, então, teremos os seguintes casos:

Caso 1: Se *Φ* (*B*, H) = *Φ* (*C*, H) = V, então, *Φ* (*B* ∧ *C*, H) = V

Caso 2: Por outro lado, suponha que *Φ* (*B* ∧ *C*, H) = F, então temos que se *Φ* (*B*, H) = V, então *Φ* (~ *B*, H) = F

Caso 3: Suponha que *Φ* (*B*, H) = F, *Φ* (~ *B*, H) = V, e para definir, temos *Φ* (□ *B*, H), temos os seguintes subcasos:

Caso 3.1 Se *Φ* (*B*, H') = V para cada H' em K de tal modo que H ***R*** H', nós dizemos que *Φ* (□ *B*, H) = V;

Caso 3.2 Por outro lado, se existir H' de tal modo que H ***R*** H', e *Φ* (*B*, H') = F, dizemos que *Φ* (□ *B*, H) = F.

Dizemos que a fórmula *A* é verdadeira no modelo *Φ associado* com a estrutura de modelo (G, K, ***R***) se *Φ* (A, G) = V; falso se *Φ* (A, G) = F. (KRIPKE, 1963, p. 69).

Dizemos que a estrutura *A* é válida, se é verdade em todos os modelos descritos acima; e dizemos que a estrutura é satisfatível se é verdade em, pelo menos, um deles[39].

Poderemos mostrar abaixo (teoremas da completude e da consistência) que uma fórmula é válida se e somente se, ela é provável num sistema apropriado.[40]

---

[39] Na verdade, definimos validade em M (S4, S5, Brouwersche) como verdade em todos os modelos M (S4, S5, Brouwersche). Menção explícita de um sistema particular, M, S4, S5 ou Brouwersche é omitido aqui e doravante sempre que as mesmas observações ou definições se aplicam a todos os quatro sistemas. Será entendido que para modelo ou e.m. nós lemos M, as outras definições sendo correspondentemente relativizadas a um sistema particular.

[40] KRIPKE, 1963, nota 2, p. 69. Para sistemas baseados em S4 e M (com sua formulação inicial modificada, veja abaixo) em S5, Hintikka descobriu a modelagem semelhante à atual. T. J. Smiley e seus alunos descobriram a modelagem desses sistemas baseados no McKinsey, que, embora um pouco mais distante, é provavelmente,

3.5.1 Definição de validade da fórmula no modelo e na estrutura

Um conjunto Σ de fórmulas é satisfatível se ele tem modelo, isto é, se há uma estrutura que é modelo dele. Uma estrutura onde todas as fórmulas de Σ são verdadeiras. (Mortari, p. 285)

Uma fórmula ψ é válida em um modelo quando ela é satisfeita por todas as fórmulas do conjunto *W*.

Escrevemos $M \vDash \psi$.

Dizemos que uma fórmula ψ é válida em uma estrutura *E* quando ψ é válida em todo modelo baseado em *E*.

Estendendo as definições acima, se Σ é um conjunto de fórmulas, dizemos que uma fórmula $w \in W$ do modelo *M* satisfaz Σ em *M*, se *w* satisfaz todas as fórmulas de Γ em *M*.

Escrevemos $M, w \vDash \Sigma$.

Da mesma forma, dizemos que Σ é válido em um modelo se todas as fórmulas em Σ são válidas no modelo.

Escrevemos $M \vDash \Sigma$.

Finalmente, dizemos que Σ é válido na estrutura *E* se todas as fórmulas em Σ são validade em *E*.

Escrevemos $E \vDash \Sigma$.

3.5.2 Condições de satisfatibilidade para um Modelo *M*

Num dado modelo *M*, é necessária uma série de condições para que uma determinada fórmula seja satisfatível. Vejamos agora que condições são essas. Aqui, quando fizermos

basicamente, equivalente ao dado aqui. B. provou a completude para S5 independentemente de 1. As regras de G., semelhantemente às regras de Tablô, são dadas em 10, 11, e 12. Embora mais complexa, é semelhante àquela do presente artigo. A antecipação mais surpreendente da teoria presente, descoberta apenas quando este artigo estava quase concluído, é o análogo algébrico em Jonsson e Tarski. Independentemente e por ignorância (embora, é claro, muito mais tarde), o presente escritor apareceu em outro lugar. Nenhum desses autores (exceto por algum impulso inicial de Curry) foi comparado em detalhes pelo presente escritor com seu próprio trabalho, que é independente deles; uma comparação detalhada pode ser útil para outros.

menção a um modelo *M ou* a um modelo *M'*, trataremos tacitamente, como $M = < M, R, V >$ e M' = $< M', R', V'>$, respectivamente. Esta notação será usada sistematicamente.

3.5.3 Condições de satisfação

Consideremos um modelo *M*. Seja $w \in W$ um elemento do mundo possível W. Vamos definir por indução a satisfação de uma fórmula ψ em w.

- Se $\psi = \bot$, w não satisfaz ψ em *M*.

- Se $\psi = p \in P$ é uma proposição elementar; dizemos que w satisfaz *p* em *M* se $w \in V$ (p).

- Se $\psi = \alpha \vee \beta$, então dizemos que w satisfaz ψ em *M* se w satisfaz α em *M* ou w satisfaz β em *M*.

- Se $\psi = \neg\alpha$, dizemos que w satisfaz ψ em *M* se w não satisfaz α em *M*.

- Se $\psi = \Diamond\alpha$, dizemos que w satisfaz ψ em *M* se w existe $u \in W$ tal que $w\ R\ u\ e\ v$ satisfaz α em *M*.

se w satisfaz ψ em M, escrevemos $M\ w \vDash \psi$.

Na definição acima, não foi necessário definirmos os casos $\psi = \alpha \wedge \beta$ e $\psi = \Box\alpha$ porque são derivados dos outros ($\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$ e $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$). No entanto, vejamos o que eles significam:

No caso da conjunção, é fácil ver que M, $w \vDash (\alpha \wedge \beta)$ se M, $w \vDash \alpha$ e M, $w \vDash \beta$.

No caso $\Box$, como $\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$, dizer que M, $w \vDash \alpha$ é o mesmo que dizer que não é verdade que existe algum ponto que w enxerga e que não satisfaz α em *M*, ou seja, todo o ponto que w enxerga e que satisfaz α em *M.* (COSCARELLI, p. 34)

Visto acima a definição de validade e as condições de satisfatibilidade para as fórmulas moleculares e modais em um modelo, agora veremos as propriedades relacionadas à validade nos seguintes sistemas:

3.5.4 Validade de fórmulas nos seguintes sistemas modais

Seja L uma lógica modal e C uma estrutura de modelos. Dizemos que L é correta em relação a C se todo teorema de L é uma fórmula válida de C.

Dizemos que L é completa em relação a C se toda fórmula válida em C é um teorema de L.

Veremos agora as condições de validade para fórmulas dos seguintes sistemas modais:

Proposição 1: A fórmula *K*

A fórmula do sistema K dada por: (□ (p →q) → (□p → □q)) é válida na lógica caracterizada por uma estrutura C.

Proposição 2: O axioma *D*

A fórmula (□p → ◊q) é válida se e somente se a relação R é serial para todo W ∈ K e tal que $w\ R\ v$, para todo $w \in W$ e exista $v \in W$ tal que $w\ R\ v$.

Proposição 3: O axioma *T*

A fórmula (□p → p) é válida se e somente se a relação R é reflexiva, isto é, $w\ R\ w$ para todo $w \in W$.

Proposição 4: O axioma *B (p → □◊p)*

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura C. contenha B é necessário e suficiente que a relação R seja simétrica, isto é, para todo $w\ R\ w$ para todo $w,\ v \in W, wR\ v \rightarrow\ v\ R\ w$.

Proposição 5: O axioma de S4 *(□p → □□p)*

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura C. contenha (4) é necessário e suficiente que a relação R seja transitiva, isto é, para todo $w, v, u \in W\ (wR\ v, \wedge\ vR\ u\ ) \rightarrow\ w\ R\ u$.

Proposição 6: O axioma de S5

A fórmula (◊ p → □◊ p) é válida se e somente se a relação R seja euclidiana, isto é, para todo $w, v, u \in W\ (wR\ v, \wedge\ vR\ u\ ) \rightarrow\ \ v\ R\ u$.

Abaixo, temos a definição para a correção e a completude de uma determinada lógica modal para uma classe de modelos específica.

3.5.5. Consistência, correção e completude

Quatro conceitos são de grande importância quando se fala em um sistema lógico:

Consistência

Uma lógica é consistente quando $p \wedge \neg p$ não é válida. Basta exigir que uma proposição qualquer e sua negação não sejam válidas ao mesmo tempo para garantir que nenhuma fórmula é válida juntamente com a sua negação. De fato, se $p \wedge \neg p$ são válidas ao mesmo tempo, dada uma fórmula ψ qualquer, $\neg p \vee \psi$ é válida, e essa fórmula é equivalente a $p \rightarrow \psi$. Disso e da validade de p segue-se por Modus Ponens que ψ é válida. Desse modo, $p \wedge \neg p$ é válida, qualquer fórmula é válida. O comentário que acabamos de fazer mostra a importância de se indagar sobre a consistência.

Comecemos observando que, dados um modelo M e um ponto w desse modelo, não podemos ter $p \wedge \neg p$ (para uma proposição elementar de p) válida em w, pela forma como definimos a valoração de um modelo. Seguindo por indução, suponhamos provado para n que nenhuma fórmula com grau até n pode ser válida, juntamente com a sua negação em qualquer ponto de M.

Estudar a consistência de uma lógica sem recorrer a modelos é bastante complicado. A consistência dessas lógicas sem esse recurso lança mão de uma função de transformação de fórmulas modais em fórmulas não modais.

Correção

Uma lógica L é correta em relação à classe de modelos C quando todo teorema de L é válido para C. Para provar que uma lógica é correta em relação a uma classe de modelos, precisamos provar que cada axioma e cada regra de inferência da lógica são válidos na classe de modelos. E foi exatamente isso que fizemos na seção anterior. Já provamos, portanto, que os sistemas que estamos estudando são corretos em relação às classes de estruturas que apresentamos.

Completude

O conceito da completude é complementar ao da correção. Uma lógica L é completa em relação à classe de modelos C quando toda fórmula válida em C é um teorema de L. O teorema da correção garante que o que pode ser demonstrado como teorema em termos sintáticos é válido em termos semânticos, enquanto a Completude garante que o que é válido em termos semânticos pode ser demonstrado como teorema em termos sintáticos. Os dois conceitos, portanto, fazem a aliança entre sintaxe e semântica.

Para provar que uma lógica é correta em relação a uma classe de modelos, precisamos provar que cada axioma e cada regra de inferência da lógica são válidos na classe de modelos.

E foi exatamente isso que fizemos na seção anterior. Já provamos, portanto, que os sistemas que estamos estudando são corretos em relação às classes de estruturas que apresentamos.

Teremos duas formas de teorema de completude fraca e de completude forte. Vejamos as definições preliminares.

Definição 3.3 (Completude Forte). Uma lógica L é fortemente completa em relação a uma classe de modelos C quando, dado um conjunto Σ de fórmulas em L e uma fórmula ψ, se ψ é consequência semântica local de Σ, então ψ pode ser demonstrada em L a partir de Σ. Em outras palavras: se Σ implica ψ semanticamente, então ψ é dedutível em L sintaticamente a partir de Σ.

Vejamos bem que completude forte implica em completude fraca. Podemos definir completude fraca pela mesma propriedade pela qual definimos completude forte, exigindo que a condição seja satisfeita não para todo conjunto de fórmulas, mas para o conjunto vazio. De fato, $\Sigma = \emptyset$, a condição de ψ ser consequência semântica de Σ nos diz que, se para algum ponto de algum modelo na classe forem satisfeitas todas as fórmulas de um conjunto vazio de fórmulas, temos ψ. Isso é o mesmo que dizer que temos ψ em todo ponto de todo modelo. A condição de ψ ser consequência sintática de Σ significa que, ao assumir todas as fórmulas de um conjunto vazio de fórmulas, demonstramos ψ sem precisar assumir mais nada. Uma lógica pode ser fracamente completa em relação a uma classe de modelos sem ser fortemente completa.

Definição 3.4 (Consistência). Seja uma lógica L. Um conjunto de fórmulas é consistente quando não apresenta nenhuma inconsistência com L, ou seja, se a partir do conjunto Σ não se demonstra nenhuma inconsistência em L. O conjunto Σ é L-consistente maximal quando L-consistente e é maximal com essa propriedade, ou seja, qualquer conjunto que contenha Σ propriamente não é L-consistente.

Teorema 1: Dadas uma lógica L e uma classe de modelos C, se todo conjunto Σ de fórmulas consistente L é satisfeito em algum ponto de algum modelo de C, então L é fortemente completa em relação a C.

Podemos notar pelo enunciado acima que o acréscimo do axioma (4) nos dá a transitividade da estrutura sobre a qual o modelo canônico é formado. Como *S*5 contém os axiomas *T, B e* (4), segue dos resultados acima que o modelo canônico de *S*5 é formado sobre uma estrutura reflexiva, simétrica e transitiva. Está assim provado o resultado.

Definição 3.5 (Modelo Canônico). Dada uma lógica modal normal, chama-se modelo canônico de *L* ao modelo *M* formado da seguinte forma:

- W é o conjunto de todos os conjuntos L-consistentes maximais.

- *R* é a relação que relaciona dois elementos w e v em *W* da seguinte forma: wRv quando, para toda fórmula $\psi \in v$, tem-se que $\Diamond\psi \in w$.

- *V* é a valoração definida da seguinte forma: dada uma proposição elementar p, $x \in V(p)$ quando $p \in x$.

Após vermos as condições de validade, satisfatibilidade e dos conceitos de consistência, correção e de completude para as estruturas de modelos, veremos abaixo alguns esclarecimentos que Kripke faz ao relacionar a estrutura de modelo com a noção de “mundos possíveis”, assim como a relação de acessibilidade, bem como da sua interpretação.

3.5.6 A relação entre a estrutura de modelo normal e os elementos da teoria da referência

No artigo de 1963, Kripke afirmou ter introduzido o modelo para S5 baseado na noção de “mundo possível”, no seu artigo de 1959.

Podemos perceber, sob o ponto de vista formal e informal, os elementos da teoria da referência – o mundo possível e o mundo real – sendo relacionados com a construção de modelo para a estrutura de modelo normal, pois Kripke estabelece para essa estrutura que:

Dado um conjunto K de mundo possível, com um elemento distinto G como “mundo real”. A proposição seria necessária se e somente se fosse ‘verdade em todos os mundos possíveis’

O artigo de 1963 estende os resultados a partir do artigo de 1959 nos dois seguintes aspectos:

Primeiramente, temos um conjunto de “mundos possíveis” K; temos também a representação do “mundo real” G, que é um elemento distinto. Para toda a fórmula atômica (ou letra proposicional) *P* será atribuído o valor de verdade em cada mundo H. Este valor de verdade é Φ (*P*, H). Esta é a pequena divergência do tratamento dado no artigo de 1959, quando não tínhamos uma função auxiliar Φ que atribuísse o valor de verdade para *P*, num determinado mundo H; ao invés disso, o próprio H era uma sentença completa que atribuía o valor de verdade para toda a subfórmula de *A*.

Nesta definição, ‘mundos’ e ‘sentenças completas’ são identificados; então, podemos dizer que mundos distintos dão sentenças distintas completas. O que isto significa? Kripke diz que: “Esta última cláusula quer dizer que não podem existir dois mundos que são distintos, nos quais tenham o mesmo valor de verdade para cada fórmula atômica”. Esta suposição é conveniente para o S5, mas é bastante inconveniente quando se trata de cálculos proposicionais modais em geral. Kripke abandona essa questão em seu artigo de 1963.

Portanto, nos é dado arbitrariamente um conjunto K de “mundos possíveis” e um “mundo real” distinto G, além de uma função Φ (*P*, H) que atribui valor de verdade para cada proposição *P*, em um determinado mundo H.

Em **segundo lugar,** nesse artigo de 1963 haverá o uso da relação **R**, que trará maiores consequências para o cálculo proposicional modal, o que não ocorre no artigo de 1959; então, vamos esclarecer como nos é dada a interpretação para a relação **R.**

Dados dois mundos quaisquer H_1, $H_2 \in K$, lemos “H_1 **R** H_2” como H_2 é possível à H_1, isto quer dizer que toda a proposição que é verdadeira em H_2, é possível em H_1.

Também ocorre outra diferença entre o artigo de 1963 e o artigo de 1959: a mudança de sentido para o termo ‘mundo’. O artigo de 1959 concebia ‘mundo’ como uma noção ‘absoluta’ (todo mundo possível) que cede para uma noção ‘relativa’ (pelo menos um mundo possível), apresentando assim uma visão modificada de ‘mundos’, como Kripke esclarece:

> [...] avaliamos a fórmula *A* como necessária no mundo H_1, se é verdadeira em **todo** mundo possível relativo à H_1; isto é, Φ ($\Box A$, H_1) = V se e somente se Φ ($\Box A$, H_2) = V **para cada** H_2 tal que H_1 **R** H_2. O operador de possibilidade em duplicidade *A* é possível em H_1 se e somente se existir H_2, relativamente possível para H_1, em que *A* é verdadeira[41]. (KRIPKE, 1963, p. 70).

Ao investigarmos a relação **R**, podemos levantar inúmeras questões acerca dela, como por exemplo se ela é transitiva, quero dizer, dado H_1 **R** H_2 e H_2 **R** H_3, isto segue que H_1 **R** H_3?

Para dizer que H_2 **R** H_3 é dizer que: qualquer fórmula *A* verdadeira em H_3, é possível em H_2. (isto é, $\Diamond A$ é verdadeira em H_2);

Mas a partir de H_1 *R* H_2[42] segue-se, por sua vez, que $\Diamond A$ é possível (*A* é “possivelmente possível” e $\Diamond\Diamond A$ é verdadeira) em H_1;

E também temos mostrado acima que *A* é pelo menos *possivelmente possível* em H_1.

Para garantir que H_1 **R** H_3, nós precisamos mostrar que se a fórmula *A* é verdadeira em H_3, isto é possível em H_1;

Então, precisamos de um axioma de redução adicional para garantir que H_1 **R** H_2 é “o que é possivelmente possível” é possível, o que será obtido pelo axioma de Brouwersche (S4 ou o axioma da transitividade). Este axioma da redução de S4 resume-se à afirmação (ou asserção) que **R** é transitiva. Similarmente, o axioma Brouwersche diz que **R** é simétrico;

Se $A \rightarrow \Box\Diamond A$ *é* válida e H_1 **R** H_2, então, teremos H_2 **R** H_1, se se pudermos mostrar que qualquer coisa que seja verdadeira em H_1 é possível em H_2;

Mas se *A* é verdadeira em H_1, pelo axioma de Brouwersche $\Diamond A$ é necessário em H_1;

Em particular, $\Diamond P$ é verdadeiro em H_2, Q.E.D. Os axiomas de redução da lógica modal clássica reduzem para simples propriedades (acima e através da reflexividade) da relação **R**.

Se abandonarmos a relação **R** e usarmos, exatamente, o conjunto K como no artigo de 1959 (ou, de forma equivalente, nós deixaremos a relação **R** sendo a relação mantida entre todos os pares dos elementos de K), então dizemos que toda proposição possível é necessariamente

---

[41] Esta referência de Kripke nos apresenta a assinalação para os valores de verdade para os operadores de necessidade ($\Box$) e de possibilidade ($\Diamond$). Kripke anteriormente trouxe também a explicação para a assinalação dos valores de verdade para as fórmulas atômicas. (Cf. KRIPKE, 1963, p. 68).

[42] Cf. (ver) a nota de rodapé explicativa 3, na página 02 deste trabalho.

possível, a característica do axioma S5. Acontece que conseguimos o mesmo axioma de redução, no entanto, se simplesmente assumirmos que **R** é uma relação de equivalência; então, temos os modelos conectados abaixo.

Um menor desvio do artigo de 1959: Neste artigo, se *Φ* (*B*, G) = V, nós dizemos que *B* é verdadeira no modelo *Φ*; previamente dizemos que *B* seria válida no modelo. A presente terminologia é claramente um aprimoramento.

Kripke segue uma linha de raciocínio trazendo primeiramente a linguagem, os axiomas do cálculo proposicional modal normal; em seguida, ele fala da relação de acessibilidade, exemplificando com a relação de transitividade ou estrutura de modelo S4. Depois segue para o que ele denomina de modelos conectados para, em seguida, abordar a estrutura de modelo em árvore, e por fim os tablôs semânticos e a relação de equivalência para esses tablôs, da qual veremos apenas os lemas, mas não explicitaremos aqui as provas desses lemas.

Agora vamos apresentar o que Kripke denomina de modelos conectados, em sua semântica relacional. Aqui apresentamos, na íntegra, o raciocínio pelo qual Kripke esclarece o que significa considerar um modelo como conectado.

3.6 Modelos Conectados

A estrutura de modelo (G, K, **R**) é chamada *conectada* se e somente se para todo H ∈ K, G **R***H. O modelo *Φ* é conectado se e somente se ele é definido no modelo de estrutura conectado. Mostramos que *toda fórmula satisfatível tem um modelo conectado* (equivalentemente, que toda fórmula não válida tem um contramodelo conectado). Aqui, se *A* é uma fórmula, *Φ* é um modelo para *A* se e somente se *A* é verdadeira em *Φ* ; por outro lado, será um contramodelo. (KRIPKE, 1963, p. 70-71)

Seja *A* satisfatível no modelo *Φ* (*P*, H), definido na estrutura de modelo (G, K, **R**). Seja K’ um conjunto de todo H ∈ K tal que G **R***H, seja **R’** a restrição de **R** para K’, e *Φ’* (*P*, H) seja *Φ* com H restrito em K’. Então, (G, K’, **R’)** é uma estrutura de modelo, e *Φ’* é um modelo de (G, K’, **R’).** Claramente *Φ* é conectado.

Mostramos por indução que para qualquer subfórmula de *B* de *A*, e H ∈ K’, *Φ’* (*B*, H) = *Φ* (*B*, H). (Consequentemente, disto se segue que *Φ* (□*A*, G) = V, então que *Φ’* é o modelo de *A* como desejado). *B* é atômica, é o resultado imediato. Se o resultado tem sido provado por *C* e *D*, e *B* é *C* ∧ *D* ou ~*C*, a verificação de *B* é trivial. Se *B* é □*C*, realizamos o passo de indução assim: Percebemos que, se H ∈ K', H **R'** H' implica em H'∈K' e então H **R** H'. Então para H∈K', H **R** H' se e somente se H **R'** H'. Por uma hipótese indutiva, para H'∈ K', *Φ* (*C*, H') = *Φ'* (*C*, H). Agora, (1) *Φ* (□*C*, H) = V se e somente se ∀ H'∈ K tal que H **R** H', *Φ* (*C*, H') = V; (2) *Φ'* (□*C*, H) = V se e somente se ∀ H'∈ K' tal que H **R** H', *Φ'* (*C*, H') = V. (KRIPKE, 1963, p. 70-71)

A discussão precedente mostra que se H ∈ K', ele pelo lado direito de (1) e (2) são equivalentes; então, *Φ* (□*C*, H) = V se e somente se *Φ'* (□*C*, H) = V, e, então, *Φ* (□*C*, H) = *Φ'* (□*C*, H), como desejado.

Então, sem perder a generalidade, poderíamos restringir as nossas considerações para modelos conectados. Note um modelo conectado no qual **R** é uma relação de equivalência entre dois mundos quaisquer que estão relacionados. Este fato considera-se adequado para o S5 da teoria dos modelos descrita por Kripke em seu artigo de 1959; Kripke diz que existe uma relação de equivalência quando dois mundos quaisquer estão relacionados.

Um modelo associado a uma estrutura é um modelo de árvore, o que veremos logo abaixo.

3.7 Estrutura de modelo de árvore

Uma tripla (G, K, ***S***), como um conjunto K, G ∈ K, e ***S*** uma relação definida em K (não necessariamente reflexiva) chamada de árvore (e G é chamada de origem se e somente se: [1] Não há H ∈ K tal que H ***S*** G; (2) Para todo H ∈ K, exceto G, há um único H' tal que H' ***S*** H; (3) Para todo H ∈ K, G ***S**** H. Se H ***S*** H' nós chamamos H de antecessor (x – 1) de H'; em termos, então de ***S***, K é caracterizado como o campo de ***S***, e G como o único elemento de K sem o antecessor. Então, podemos falar da relação ***S*** como a relação árvore se G e K satisfazem a prévia condição existente; eles serão determinados por ***S***.

Um modelo de estrutura M (G, K, R) é chamada estrutura de modelo de árvore M se e somente se existe a relação ***S*** tal que (G, K, S) é a árvore e R é a menor relação reflexiva contida em ***S*** (relação reflexiva gerada como ***S***). Evidentemente, neste caso H_1 **R** H_2 se e somente se H_1 ***S*** H_2 ou $H_1 = H_2$. Semelhantemente, S4 (Brouwersche, S5) estrutura de modelo (G, K, ***R***) é a árvore do modelo de estrutura S4 (Brouwersche, S5) se e somente se houver a relação ***S*** tal que

(G, K, ***S***) é a árvore de ***R*** é a menor relação reflexiva e simétrica contida em ***S***. Observe que o modelo de estrutura S4 pode ser a estrutura de modelo de árvore S4, ainda que não seja uma estrutura de modelo de árvore M; e similarmente para outros casos.

Evidentemente, cada estrutura de modelo de árvore está conectada. Para a condição (3), para cada H ∈ K, G ***S**** H; e como S ⊆ ***R***, segue que ***S**** ⊆ ***R****. Em S5, modelo de estrutura finita ou contável conectado é uma estrutura de modelo de árvore S5. Isto não necessita manter para S4, e, de fato, existem estruturas de modelos S5 conectados, mas não estruturas de modelos de árvores S4. (e.g. K = {G, K} ***R*** tem relação com todos os pares) que são estruturas de modelos de árvores S5, mas não são estruturas de modelos de árvores S4. A menos que, quando a confusão não surgir, deixaremos nossa referência a um determinado sistema, quando esse sistema for compreendido totalmente; se dissermos 'estrutura de modelos de árvores', quando falamos sobre S4, queremos dizer 'estrutura de modelo de árvores S4' e similar.

O modelo associado com a estrutura de modelo é chamado modelo de árvore. Mostraremos abaixo (mais forte resultado do que 2.2) que a teoria semântica não perderia a generalidade se somente modelos de árvores fossem admitidas (cf. 3.3) Estruturas de modelo de árvore admitem a representação esquemática conveniente e óbvia que inspira seu nome. Ponha G na origem, conecte cada H tal que G ***S*** H diretamente para G, e assim por diante.

É através do tablô semântico que Kripke testa uma determinada fórmula, se ela é válida ou não para uma determinada estrutura. Assim, vejamos abaixo o que é um tablô semântico.

3.8 Tablôs semânticos

A noção de tablô semântico desenvolvida aqui é semelhante à que ele apresenta no artigo de 1963, de que o artigo de 1959 serve como um pano de fundo.

Novamente, lidamos em cada estágio da construção com um sistema de conjuntos alternativos de tablôs; em cada conjunto, um tablô é apontado como um tablô principal, enquanto os outros são auxiliares. A única diferença entre a presente situação e aquele do artigo de 1959 reside no fato de que cada conjunto alternativo do sistema é ordenado por uma relação reflexiva R, paralela ao R reflexivo da teoria do modelo, de modo que cada estágio da construção é agora um sistema de conjuntos alternativos ordenados.

Nós usamos letras t, t', t", t_1, t_2, ... para tablôs; se t_1 ***R*** t_2, nós dizemos que t_2 está relacionado com t_1, ou que t_2 é auxiliar de t_1. As regras Nl, Nr e *Λ*l permanecem como [1], como nós veremos. Assim, na verdade, a regra *Λ*l, mas sua reformulação é complicada (veja abaixo). As regras Yl e Yr são alteradas paralelamente ao novo tratamento da necessidade na teoria do modelo.

Dada a fórmula *A*, para ver se ela é válida, tentamos encontrar um contra modelo para essa fórmula; se não existe um contra modelo, a fórmula é válida. Se *A* tem uma forma $A_1 \wedge ... \wedge A_m . \supset . B_1 \vee ... \vee B_n$, claramente A_1, ... A_m deve ser verdadeira e B_1, ... B_n falsa em qualquer contra modelo de *A.* Nós representamos esta situação colocando A_1, ... A_m no lado esquerdo, e B_1, ... B_n no lado do tablô principal da construção; isso representa nossa tentativa de encontrar um modelo no qual A_1, ... A_m são verdadeiras, enquanto B_1, ... B_n são falsas. Então continuamos seguindo a construção por meio das regras (que se aplicam a qualquer tablô, quer seja o principal ou o auxiliar).

Nl. Se ~*A* aparece na coluna esquerda do tablô, coloque *A* na coluna do lado direito desse tablô.

Nr. Se ~*A* aparece na coluna direita do tablô, coloque *A* na coluna do lado esquerdo desse tablô.

*Λ*l. Se $A \wedge B$ aparece na coluna esquerda do tablô, coloque *A* e *B* na coluna do lado esquerdo desse tablô.

Λr. Se $A \wedge B$ aparece na coluna direita do tablô t, há duas alternativas; Estender o tablô t, quer colocando A no lado direito da coluna ou colocando B no lado direito da coluna. Se o tablô t está ordenado no conjunto *Y* , então, é evidente que no próximo estágio teremos dois conjuntos alternativos, dependendo de qual extensão do tablô for adotada. Falando informalmente, se o conjunto ordenado original é diagramado estruturalmente numa folha de papel, copiamos todo o diagrama duas vezes, em um caso colocando *A* adição na coluna direita do quadro t e, no outro caso, colocando *B*; os dois novos papéis correspondem a dois novos conjuntos alternativos. Espero que esta explicação faça o processo intuitivamente mais claro; a notação formal é bastante confusa: Dado o tablô t no conjunto alternativo *Y*, se t tem $A \wedge B$ no lado direito, nós substituímos *Y* por dois conjuntos alternativos, Y_1 e Y_2, ... onde $Y_1 = Y — \{t\} \cup \{t_1\}$ e $Y_2 = Y — \{t\} \cup \{t_2\}$ e t_1 (t_2) é como t exceto que, além disso, contém *A* (*B*) à direita. Como *Y* é ordenado pela relação reflexiva ***R***, nós devemos definir as ordens $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ sobre os dois novos conjuntos de Y_1 e Y_2. Informalmente declarado, a ordenação $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ nos dois novos conjuntos de Y_1 e (Y_2) é precisamente o mesmo que Y, exceto que t_1 (t_2) substituem t ao longo do tablô. Mais formalmente, declaramos esta condição para Y_1: Temos que t' e t'' sejam qualquer tablô de Y outro que não seja t. Então t' $\boldsymbol{R}$ t_1 se e somente se t' $\boldsymbol{R}$ t (em Y), t_1 $\boldsymbol{R}_1$ t' se e somente se t_1 $\boldsymbol{R}$ t, e t' $\boldsymbol{R}_1$ t'' se e somente se t' $\boldsymbol{R}$ t''. Além disso, ao fazer $\boldsymbol{R}_1$ reflexivo nós estipulamos que t_1 $\boldsymbol{R}$ t_1. Estas condições determinam uma nova ordem $\boldsymbol{R}_1$ em Y_1. Semelhantemente para Y_2.

Yl. Se □A aparece no lado esquerdo do tablô t, então para cada tablô t', tal que t R t', colocar A na esquerda de t'.

Yr. Se □A aparece na direita do tablô t então nós começaremos um novo tablô t', com A na direita, tal que t R t'.

Dado qualquer conjunto alternativo de Y, ordenado pela relação $\boldsymbol{R}$, as regras estipuladas acima estabelecem que certos tablôs estão $\boldsymbol{R}$-relacionados (conferir em particular Yr e *Λ*r). Em adição a estas estipulações, definimos requisitos correspondentes aos das estruturas de modelo correspondentes. Como $\boldsymbol{R}$ em (G, K, $\boldsymbol{R}$) era reflexivo, então $\boldsymbol{R}$ é presumidamente reflexivo. Além disso, para S4, presumimos que R é transitivo, para o tablô Brouwersche, presumimos $\boldsymbol{R}$ sendo simétrica e no tablô S5 presumimos ambos. No tablô M, evidentemente, não colocamos nenhuma restrição senão outra reflexiva em $\boldsymbol{R}$. Finalmente, presumimos que $\boldsymbol{R}$ é válido apenas conforme exigido pelas estipulações anteriores e pelas regras Yl e *Λ*r acima (i.e., $\boldsymbol{R}$ sendo o menor da relação que satisfaz essas condições).

Como no artigo de 1959, nós definimos o tablô como fechado se e somente se alguma fórmula *A* aparece em ambos os lados do tablô, o conjunto do tablô como fechado se e somente se no seu tablô está fechado, um sistema de tablô como fechado se e somente se cada um dos seus conjuntos alternativos estiver fechado. Como cada estágio da construção, teremos um sistema de conjuntos alternativos; nós podemos finalmente definir uma construção sendo fechada se e somente se, para algum estágio da construção, o sistema fechado de conjuntos alternativos aparece.

Finalmente, nós definimos (na terminologia de Gallegher) a construção para *A* começando por colocar *A* do lado direito do tablô principal da construção.

Duas restrições são substituídas pelas regras, em ordem para facilitar o término da construção.

A regra não se aplica em uma fórmula em que ocorra um conjunto alternativo fechado, e também não se aplica se a fórmula o for. Também não se aplica a regra se ocorrer uma fórmula ‘supérflua’. Definimos ‘supérfluo’ como por exemplo: Yr é supérfluo se e somente se já existe o tablô t’ tal que t ***R*** t’ com *A* do lado direito de t’; este tablô t’ pode, claramente, ser o mesmo t. Nl é supérfluo se e somente se *A* já aparece na direita de t, e assim por diante.

Estritamente, isto pode ser mais rigoroso se especificarmos a ordem definida da prioridade na qual cada regra foi aplicada. Mas na realidade (como é claro nos resultados semânticos de 3.2) tal restrição de ordem seria irrelevante para a questão de saber se uma construção de quadro fecha; as regras são permutáveis. Portanto, por outro lado, se isto é conveniente para uma prova particular, nós podemos especificar qualquer ordem que nós desejarmos; isto é explorado no 5.1.

Abaixo, segue um exemplo de tablô semântico no qual veremos, passo a passo, como se dá a sua construção.

3.8.1 Exemplo

No diagrama seguinte, temos uma construção S4 começando com $\Box (A \land B)$ no lado esquerdo e $\Box (\Box A \land \Box B)$ no lado direito

$$\begin{array}{c|l} \Box (A \land B) & \Box (\Box A \land \Box B) \\ A \land B & \\ A & \\ B & \\ & \\ \multicolumn{2}{c}{t_1} \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{c|l} & \Box (\Box A \land \Box B) \\ & \\ & \\ & \\ & \\ \multicolumn{2}{c}{t_2} \end{array}$$

FIGURA 05 – Tablô de Kripke (KRIPKE, 1963, p. 74)

A primeira fórmula da esquerda de t_1 é dada; a segunda é obtida por Yl (lembre-se que ***R*** é reflexivo!), e a terceira e a quarta por *Λ*l. Aplicando Yr na direita, nós começamos o tablô t_2 como demonstrado. A seta indica que t_1 ***R*** t_2.

Neste ponto, a regra *Λ*r admite duas alternativas. Colocando estas alternativas abaixo, segue-se que:

$\Box (A \wedge B)$	$\Box (\Box A \wedge \Box B)$			$\Box (\Box A \wedge \Box B)$
$A \wedge B$				$\Box A$
A				
B		$\rightarrow$		
	t_1		t_{21}	

FIGURA 06 – Tablô de Kripke (KRIPKE, 1963, p. 74)

Ou:

$\Box (A \wedge B)$	$\Box (\Box A \wedge \Box B)$			$\Box (\Box A \wedge \Box B)$
$A \wedge B$				$\Box B$
A				
B		$\rightarrow$		
	t_1		t_{22}	

FIGURA 07 – Tablô de Kripke (KRIPKE, 1963, p. 74)

Em cada alternativa, nó recopiamos o diagrama inteiro, mas em um $\Box A$ vai para a direita de t_2, que é renomeado como $t_{21.}$ Nós continuamos o desenvolvimento da primeira alternativa (o outro é semelhante):

$\Box (A \wedge B)$	$\Box (\Box A \wedge \Box B)$		$A \wedge B$	$\Box A \wedge \Box B$		$A \wedge B$	A
$A \wedge B$			A	$\Box A$		(A)	
A		$\rightarrow$	B		$\rightarrow$	(B)	
B							
	t_1			t_{21}			t_3

FIGURA 08 – Tablô de Kripke (KRIPKE, 1963, p. 74)

Por meio de Yr, nós introduzimos t_3 com *A* no lado direito. Temos t_1 ***R*** t_2, t_{21} ***R*** t_3, como demonstrado pela seta. Como t_1 ***R*** t_{21} e $\Box (A \wedge B)$ está no lado esquerdo de t_1, nós colocamos $A \wedge B$ no lado esquerdo de t_{21}. Também por transitividade da seta t_1 ***R*** t_2, então nós colocamos $(A \wedge B)$ no lado esquerdo de t_3. A construção é fechada como quando aparece *A* em ambos os lados de $t_{3.}$

Portanto, quando ocorrer da construção ser fechada, em que aparece *A* em ambos os lados do conjunto alternativo $t_{3,}$ não poderá existir, no modelo S4, uma estrutura Φ no qual $\Box (A \wedge B)$ é verdadeiro enquanto $\Box (\Box A \wedge \Box B)$ é falso, pois em tal modelo, como fica claro seguindo a construção, para cada t_i (i = 1, 2, 3), corresponderia a um mundo H_i ($G = H_1$) com a propriedade que, para qualquer *C*, $\Phi(C, H_i) = V$ (F) se *C* aparece na esquerda (direita) de t_i. Já que na alternativa escolhemos *A* aparece em ambos os lados esquerdo e direito de t_3, nós teríamos que ter ambos Φ (A, H_3) = V, e Φ (A, H_3) = F, a contradição. (Uma outra alternativa: nós teríamos que ter Φ (B, H_3) = V = F).

Observe ainda que se ***R*** não é transitivo, não teríamos mais o fechamento; na verdade, as fórmulas entre parênteses não iriam mais aparecer em t_3. Daí, nós de fato obteríamos um Modelo M Φ em cada Φ ($\Box A \wedge \Box B$) = V, enquanto Φ ($\Box$ ($\Box A \wedge \Box B$)) = F. A natureza deste modelo Φ em (H_1, K, ***R)***, com H_3 ***R*** H_2 e H_2 ***R*** H_3 pode ser lida (parcialmente) dos tablôs. Examinamos aqueles lugares onde as fórmulas atômicas ocorrem à esquerda ou à direita. Como A e B estão à esquerda de t_1 e t_{21}, nós temos Φ (A, H_1) = Φ (B, H_1) = Φ (A, H_2) = Φ (B, H_2) = V; enquanto, por outro lado, como *A* está à direita de t_3, Φ (A, H_3) = F. *B* não aparece em nenhum dos lados de t_3. Isto mostra que Φ (B, H_3) pode ser atribuído arbitrariamente. O leitor pode verificar isso, não importa o valor que atribuímos a Φ (B, H_3), nós temos:

$$\Phi\ (\Box\ (A \wedge B), H_1 = V \text{ e } \Phi\ (\Box\ (\Box A \wedge \Box B), H_1 = F.$$

Além do mais, nota-se que a construção do tablô não seria alterada se a seta fosse lida como simétrica; assim, o modelo ainda funcionaria se estipularmos além disso que H_3 ***R*** H_2 e H_2 ***R*** H_3. Portanto, segue-se que temos um modelo Brouwersche com as propriedades declaradas. O resultado da discussão é: $\Box$ ($A \wedge B$) $\supset$ $\Box$ ($\Box A \wedge \Box B$) é válida em S4, mas não em M e no sistema Brouwersche.

3.8.2 Exemplo

Neste exemplo abaixo, temos uma árvore de construção finita e fechada em sistema S5, começando com ~ $\Box A$ no lado direito e $\Box$ ~ $\Box A$ no lado esquerdo:

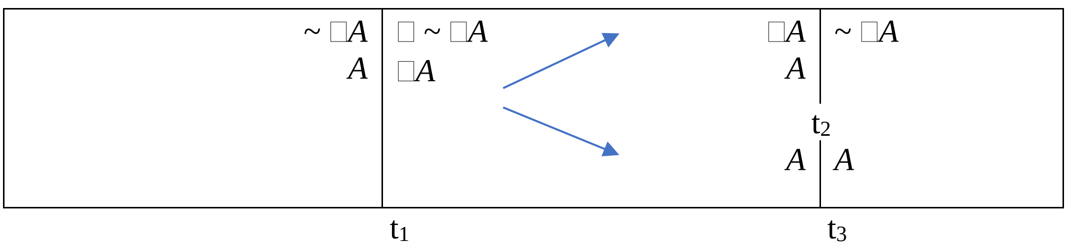

FIGURA 09 – Tablô de Kripke (KRIPKE, 1963, p. 75)

Como *A* aparece em ambos os lados esquerdo e direito de t_3, a construção está fechada. Observe que exigimos a simetria de ***R*** para colocar A à esquerda de t_1, enquanto a simetria e a transitividade foram necessárias para colocar A à esquerda de t_3. Portanto, nem o Brouwersche, nem a construção S4 seria fechado, e na construção S4 *A* não apareceria na esquerda de t_1. Isso é demonstrado no S5, mas em nenhum outro dos sistemas consideraremos $\sim \Box A \supset \Box \sim \Box A$ é válido.

A construção para uma estrutura de modelo *A* é considerada fechada quando essa estrutura *A* é válida para cada um dos quatro sistemas modais, numa relação de equivalência entre eles, como também de outros que tenham as mesmas restrições, como as colocadas em ***R*** para tablôs e modelos. Assim, temos abaixo seus teoremas e lemas.

3.9 Equivalência de tablôs para modelo

Esta seção mostrará que a construção para *A* é fechada se e somente se *A* é válido para cada um de cada dos quatro sistemas que nós consideramos (ou mesmo para quaisquer outros sistemas em que precisamente as mesmas restrições são colocadas em ***R*** para tablôs e modelos). O teorema se reduz a dois lemas, semelhantes aos dois primeiros lemas do artigo de 1959.

Lema 1. Se a construção para *A* é fechada, *A* é válida.

Lema 2. Se a construção do tablô para *A* não é fechada, então *A* não é válido.

A árvore correspondente a uma construção fechada é finita. Se uma construção não é fechada, a árvore poderá ser finita ou infinita. Suponhamos que seja finita; então, claramente, a construção tem apenas um número finito de estágios. Visto que a construção não está fechada, o estágio final da construção contém ao menos um conjunto alternativo, que será fechado.

3.10 Propriedade da Completude para tablô

Nós podemos mostrar que cada fórmula válida *A* é provável mostrando que se a construção *A* é fechada, então *A* é provável em um sistema apropriado. Aqui nós encontramos isto conveniente para invocar a construção de tablô baseada na relação do sistema *S*, ao invés de usar a relação ***R***.

Primeiro, para a árvore de tablôs ordenadas pela relação *S* em um determinado estágio da construção, nós definimos a classificação do tablô como o seguinte:

3.10.1 Árvores segundo Kripke [43]

Como já dissemos na seção anterior, uma tripla ordenada <G, K, ***S***> com um conjunto K, G ∈ K e ***S*** uma relação definida em K (não necessariamente reflexiva) é chamada uma árvore (e G é chamada sua origem) se somente se:

i) Não existe H ∈ K tal que H ***S*** G;

ii) Para cada H ∈ K, exceto G, existe um único H' tal que H' ***S*** H;

iii) Para cada H ∈ K e G ***S**** H, temos que se H ***S*** H', então H é o predecessor de H'.

Acerca de S, K é caracterizado como o campo de S, e G como o único elemento de K, sem um predecessor. Assim, podemos falar de uma relação S como uma relação em árvore se G e K satisfazem as condições prévias existentes. Eles seriam, então, determinados por S.

Uma estrutura de modelo M (G, K, ***R***) é chamada de uma árvore M, se e somente se, existe uma relação S tal que (G, K, ***S***) é uma árvore, e ***R*** é a relação reflexiva menor contida em ***S*** (a relação reflexiva 'gerada por' ***S***). Claramente, neste caso, H_1 ***R*** H_2 se e somente se H_1 ***S*** H_2 ou $H_1 = H_2$. Similarmente, em S4 (Brouwersche, S5), a estrutura de modelo (G, K, ***R***) é uma árvore S4, se e somente se, existe uma relação ***S*** tal que (G, K, ***S***) é uma árvore e ***R*** é a menor relação reflexiva e transitiva (reflexiva e simétrica, equivalência) contida em S. Note que uma estrutura de modelo S4 pode ser uma árvore da estrutura de modelo S4, e ainda não ser uma árvore de estrutura de modelo M; e similarmente para outros casos.

Deste modo, Kripke mostra que um modelo associado com uma estrutura de modelo de árvore é chamado um modelo árvore.

Como já vimos, os conceitos das propriedades de decidibilidade, consistência, completude para um sistema lógico, na seção 3.4.5. da página 62, vejamos agora o conceito dessas propriedades para tablô.

---

[43] KRIPKE, 1963, p. 71-72.

3.10.2 Propriedades: decidibilidade, consistência e completude para tablô

Propriedade de Consistência

Precisamos verificar se todas as fórmulas prováveis de M (S4, S5, Brouwersche) são válidas na teoria do modelo apropriado. Em todos os casos, as provas podem ser realizadas com o auxílio de tablôs; precisamos apenas verificar se cada axioma é válido para a teoria do modelo apropriado e se as regras preservam a validade.

Por exemplo, a regra Modus Ponens (R1) preserva a validade; pois se Φ (A, H) = V, Φ (A → B, H) = V, então pelas regras de validação também a implicação '→' será Φ (B, H) = V.

3.10.3 Propriedade da Completude

Podemos mostrar que toda a fórmula A válida é provável se a construção de A é fechada[44], então A é provável no sistema apropriado.

Aqui, achamos conveniente evocar a construção de tablôs com base na relação S, mais do que usar a relação R.

Primeiro, para uma árvore de tablôs ordenados pela relação S em um determinado estágio de uma construção, nós definimos a classe de um tablô da seguinte maneira: Um tablô t tem uma classe 0 na árvore, se não existe nenhum outro tablô t'. Caso contrário, seja $t_1, \ldots, t_n$, todos os tablôs têm t_1 de modo que t S t_i.

Define-se a fórmula associada de um tablô t a um estágio $A_1, \ldots \wedge A_m \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n$, onde $A_1, \ldots A_m$ são as fórmulas ocorridas à esquerda de t, de um dado estágio. E $B_1, \ldots, B_n$, são as fórmulas que ocorrem à direita de t nesse estágio.

Além disso, define-se a *fórmula característica* de um tablô t, de um estágio dado por indução sobre a classe de t: se t tem a classe 0, então, a *fórmula característica* está associada à fórmula. Outras condições[45] são apresentadas se t tem classe maior do que zero ou menor do que zero. Seja B_i a fórmula característica de t_i. Além disso, seja A associada à fórmula de t. Então, a fórmula *característica* de t é definida como:

$$A, \ldots \wedge \Diamond B_1 \wedge \Diamond B_2 \wedge \ldots \Diamond B_n.$$

---

[44] Uma fórmula é fechada quando ela é atômica ou todas as variáveis estão ligadas aos quantificadores

[45] *Cf.* Kripke 1963, p. 83.

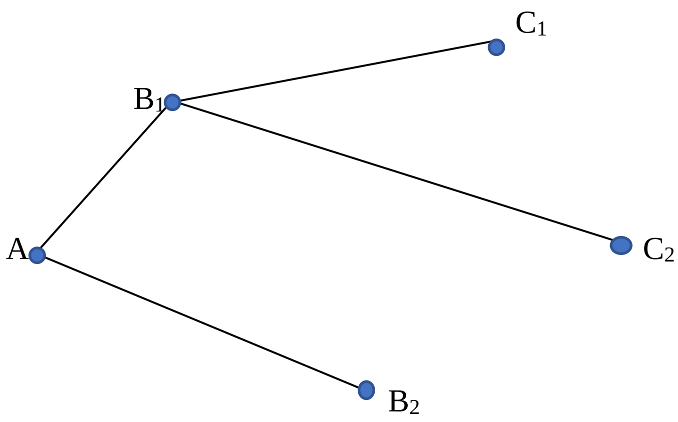

FIGURA 10 - Fórmula característica de uma árvore de tablô de Kripke (1963, p. 83)

A *fórmula característica* de uma árvore em tablô para um conjunto ordenado de fórmulas, o tablô principal[46], é a seguinte:

Na figura acima, cada nó representa um tablô. Nele, temos a fórmula característica associada aos nós; B_2, C_1, *e* C_2 são classes 0. B_1 está associado ao tablô de classe 1; e *A* está associado à classe 2. A fórmula característica da árvore é seguinte:

$$A \wedge \Diamond (B_1 \wedge \Diamond C_1 \Diamond C_2) \wedge \Diamond B_2.$$

O teorema da decidibilidade do tablô envolve as questões da satisfatibilidade e da validade. (p. 222, p. 224) Por exemplo, ao contrário da decidibilidade, o CQC é indecidível, pois não existe método mecânico que diga sempre que uma fórmula é válida ou não. Portanto, temos que ter um algoritmo para decidir se uma fórmula é válida ou não. Os tablôs semânticos constituem um procedimento de decisão para o conjunto de fórmulas de uma estrutura. Assim, o conjunto de fórmulas é dito decidível pelo método de tablôs semânticos. (p. 195, 196, 222, 224; 285).

A característica da correção consiste em ter a certeza de que uma fórmula é válida quando o procedimento da prova diz que ela é, e não existe prova nenhuma de que a fórmula não é válida. E quando queremos saber se uma fórmula não é válida, temos no procedimento de prova que diz que ela não é válida. Esse método mecânico é o método de tablôs semânticos. (p.197).

[46] O tablô principal é a origem da árvore.

Vejamos outro exemplo de tablô[47]:

Dada a fórmula: $\sim \Box(A \wedge \Diamond \sim A \sim . \text{ v } . \sim A \wedge \Diamond A)$

Vamos substituir $A \wedge \Diamond \sim A \sim . \text{ v } . \sim A \wedge \Diamond A$ por $(X_1 \vee X_2)$:

Aplicamos a construção do tablô da seguinte maneira:

$\Box(X_1 \vee X_2)$	$\sim \Box(X_1 \vee X_2)$	$\sim A$	A	A
$(X_1 \vee X_2)$ (Axioma reflexivo)		$\Box(X_1 \vee X_2)$		$\Box(X_1 \vee X_2)$
X_1		$(X_1 \vee X_2)$ MP		$(X_1 \vee X_2)$ MP
A		X_2		X_1
$\Diamond \sim A$		$\Diamond A$		$\Diamond \sim A$
Coluna Esquerda			Coluna Direita	

FIGURA 11 – Tablô de Kripke

Como conceitos elementares da lógica matemática, temos visto que os tablôs revelam três propriedades, a saber: a consistência, a completude e a decidibilidade. A propriedade da correção está atrelada à validade da fórmula.

Em geral, existem três tipos de fórmulas numa linguagem formal:

i. Tautológicas: são verdadeiras em todas as valorações;
ii. Contradições: são falsas em todas as valorações;
iii. Contingências: são verdadeiras em pelo menos uma e falsa em ao menos uma valoração.

A valoração é o modelo de um conjunto de fórmulas Γ, para toda $\gamma \in \Gamma$, em que $v(\gamma) = V$, e os procedimentos de provas nos mostram essas propriedades.

Assim, temos que uma fórmula é satisfatível se é possível achar uma interpretação (modelo) que torne a fórmula verdadeira, ou em outras palavras, um conjunto de fórmulas é satisfatível se ele tem modelo, isto é, se há uma estrutura que é modelo dele, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras.

47 Kripke, 1963, p. 91.

E uma fórmula é válida se todas as interpretações tornam a fórmula verdadeira.

Sobre a completude, temos o seu teorema que diz: se temos um conjunto de fórmulas Γ, α será consequência sintática de Γ, se e somente se, α for consequência semântica de Γ.

$$\Gamma \vdash \alpha \text{ se e somente se, } \Gamma \vDash \alpha$$

E tem o seguinte corolário: $\Gamma \vDash \alpha$.

Quando um conjunto de Γ é vazio: $\vdash \alpha$ se e somente se $\vDash \alpha$.

Um conceito análogo é o conceito de um conjunto consistente. Um conjunto Γ de fórmulas é consistente se e somente se não existe uma fórmula α tal que $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Esses conceitos são extremamente relevantes para a nossa pesquisa por se tratar de propriedades para o tablô semântico, o método de que o nosso autor se utiliza.

O tablô traz o método da refutação, para saber se a fórmula é válida ou não no sistema, e por meio dele, podemos descobrir se há consistência, isto é, não há contradição; se há completude, ou se todas as fórmulas do sistema são válidas; e por último, se há decidibilidade, ou se o tablô é fechado, se a partir dele, se conhece se a fórmula é válida ou não.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao nos debruçarmos sobre o estudo da obra *O Nomear e a Necessidade* (2012), percebemos que havia conceitos acerca da lógica modal que já estavam presentes em outros trabalhos de Kripke. Em 1959 e 1963, Kripke já dava indícios da sua teoria da referência causal, que só veio a ser tornar mais conhecida posteriormente com a publicação da obra *Naming and Necessity* de 1980.

De fato, percebemos elementos da sua teoria da referência causal nesses artigos de 1959 e de 1963, que neste ínterim não eram ainda conceitos.

Em 1959, Kripke publicou a prova do teorema da completude para o sistema S5. A base da análise informal motivadora das suas definições nesse artigo veio da seguinte noção: "A proposição é necessária se e somente se for verdadeira em todos os mundos possíveis". (KRIPKE, 1959, p. 03).

Kripke entendia que: "Em lógica modal, deseja-se conhecer não somente o mundo real, mas também os mundos concebíveis". (KRIPKE, 1959, p. 02- 03).

Ou seja, *P* pode ser verdadeira num "mundo real", mas falsa num mundo imaginável, e similarmente para P (x_1, ..., x_n). Desta forma, seríamos levados, não para uma única atribuição de valores, mas a um conjunto *K* de atribuições, nas quais todas, exceto uma, representam mundos que são concebíveis, mas não reais. Para o "mundo real", Kripke estipula um elemento distinto 'G', na sua estrutura de modelos normais.

No artigo de 1963, em específico, Kripke continua adotando essas noções de elementos da teoria da referência causal, ao explicitar informalmente as estruturas de modelos normais e a relação de acessibilidade, mas sem trazer os conceitos dos termos "mundos possíveis" e "mundo real", no seu artigo anterior (1959). (KRIPKE, 1963, p. 69).

O tratamento deste artigo generaliza que K continua sendo a representação dos "mundos possíveis", que G continua sendo o elemento distinto representando o "mundo real", e que a toda fórmula atômica (isto é, a letra proposicional) *P* é assinalada um valor de verdade em cada mundo H. O valor de verdade é Φ (*P*, H), tendo essa função de interpretação como o diferencial entre os dois artigos, pois Kripke afirma que essa função auxiliar Φ não existia no primeiro artigo (1959).

Outra mudança é acerca da noção de “mundos possíveis”, que no artigo de 1959 é um paradigma ‘absoluto’ (todos os mundos são relativamente possíveis a outro); e uma inovação, que Kripke diz ter cedido para um novo paradigma ‘relativo’ de “mundos possíveis” (quando diz que um mundo é relativamente possível a outros).

Também no artigo de 1963 prevalece a ideia de que mundos distintos dão distintas atribuições de valores. Isto quer dizer que não podem existir dois mundos em que a cada mundo seja atribuído o mesmo valor de verdade para cada fórmula atômica.

Em suma, Kripke apresenta a noção de “mundo possível” como:

> [...] Temos dado o conjunto ‘K’ como o conjunto de ‘mundos possíveis’ e o distinto elemento ‘G’ como o ‘mundo real’, e a função Φ (P, H) atribuindo a cada proposição P um valor de verdade em um mundo H. (KRIPKE, 1963, p. 69).

Além dos conceitos de “mundos possíveis e o de mundo real”, também identificamos os conceitos de “designadores rígidos”, que Kripke apresenta como x_1, e x_2 , que representam objetos individuais que permanecem os mesmos em todos os “mundos possíveis”.

Esta mesma definição é dada para designadores rígidos tal como encontramos na sua obra *O Nomear e a Necessidade* (1980), dado este já explicitado no capítulo primeiro deste trabalho.

Segundo Kripke, parece plausível que não apenas o universo do discurso possa conter um número arbitrário de elementos, assim como predicados podem receber quaisquer interpretações no “mundo real”; mas igualmente qualquer combinação de “mundos possíveis” pode ser associada ao “mundo real” em relação a algum grupo de predicados.

Este raciocínio acerca da possibilidade do universo do discurso conter um número arbitrário de elementos e dos predicados receberem quaisquer interpretações no “mundo real” associado ao “mundo possível”, é o mesmo raciocínio que Kripke usa em sua obra *O Nomear e a Necessidade* (1980), ao definir o que são designadores não rígidos ao serem submetidos a situações contrafactuais.

Kripke demonstrou em seu livro vários exemplos nos quais os ‘nomes’, -ou seja: ‘os designadores rígidos’- teriam um comportamento diferenciado daqueles apresentados pelas ‘referências’, ou seja, pelos ‘designadores não rígidos’, como ele já apresentava em sua lógica proposicional modal normal.

Com base em todas essas investigações que foram o resultado das análises concernentes aos artigos de 1959, 1963 e da obra *O Nomear e a Necessidade* (1980), estabelecemos a relação entre a filosofia da linguagem e a lógica, construindo assim a ponte entre duas dimensões da filosofia, sendo que ao mesmo tempo revelamos, através de um recorte horizontal, o Kripke lógico no início da sua carreira científica como o Kripke analítico de 1970, quando de suas palestras na universidade de Princeton.

Assim, acreditamos ter contribuído com a pesquisa acadêmica ao trazer um breve estudo sobre um autor tão relevante, bem como sobre uma temática não tão próxima da vida acadêmica em geral. A semântica de Kripke possui uma grande relevância para a filosofia analítica, lógica, metafísica, e demais ciências, aproximando-nos do modo correto de raciocinar acerca de como as coisas são, como elas poderiam ser e como elas devem ser.

REFERÊNCIAS

ARISTÓTELES, **Metafisica I, II, III.** Trad. Giovanni Reale. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

ARISTÓTELES. **Retórica** – Obras Completas. Trad. Manoel Alexandre Júnior. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 2005. Disponível em: https://sumateologica.files.wordpress.com/2009/07/aristoteles_-_retorica2.pdf. Acesso em: 02 fev 2019.

ARISTÓTELES, **Órganon**: Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores, Analíticos Posteriores, Tópicos, Refutações sofísticas. Trad. Edson Bini. 2ª ed., São Paulo: Edições Loyola, 2010.

BARNES, J. **Aristóteles**. Aparecida, São Paulo: Editora Ideias e letras, 2009.

CAMPOS, Jorge. **O enigma do nome.** Porto Alegre – RS: Editora AGE, 2004.

C.C. CHANG, H. J. KEISLER, Model theory. 3rd., vol. 73, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, The Netherlands. P. 650, 1990. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-logic-and-the-foundations-of-mathematics/vol/73/suppl/C. Acessado em 30 abr. 2022.

COSCARELLI, B.C. **Introdução à lógica modal.** Tese (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo – SP. 98 p., 2008.

FREGE, G. **Conceitografia.** Trad. Paulo Alcoforado. São Paulo – SP, 2ª ed. amp. e rev. Editora da Universidade de São Paulo – SP, 2009.

GABBAY, D. **Introducing reactive Kripke semantics and arc acessibility**. Ann Math Artif Intell 66, p. 7-53, 2001. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10472-012-9313-y. Acesso em 02 fev. 2019.

GABBAY, D.M., GUENTHNER, F. **Handbook of philosophical logic**. 2nd. Edition. Vol. 1. Disponível em: http://philosophieweb0.001.free.fr/GabbayandGuenthered-Handbook%20of%20philosophical%20logic%20(Vols.%201%20-%209).pdf. Acesso em 14 mai. 2022.

GORSKY, S.B., **A semântica algébrica para as lógicas modais e seu interesse filosófico**. *Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade de Campinas*. Campinas, SP: 2008, p. 1-119. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/279514/1/Gorsky_Samir_M.pdf. Acesso em 02 jul. 2021.

KNEALE, W. e KNEALE, M. **O desenvolvimento da lógica**. 2ª ed. Trad. M. S. Lourenço. Lisboa: Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

KRIPKE, S., **Naming and Necessity**. 12th ed. Cambridge: Harvard University Press, p. 1-180, 2001. Disponível em: http://people.exeter.ac.uk/sp344/naming_and_necessityocr.pdf. Acesso em: 28 jul. 2019.

KRIPKE, S., **O nomear e a Necessidade**. Tradução de Ricardo Santos e Teresa Felipe, Lisboa: Gradiva Publicações S.A., 2012.

KRIPKE, S.A., **A Completeness Theorem in Modal Logic I**. *Journal of Symbolic Logic,* Cambridge, Massachusetts, EUA, Vol. 24, N.1, p.1-14, março de 1959. Disponível em: http://saulkripkecenter.org/wp-content/uploads/2019/03/A-Completeness-Theorem-in-Modal-Logic-PUBLIC.pdf. Acesso em 28 jul. 2021.

KRIPKE, S.A., **Semantical Analysis of Modal Logic I Normal Modal Propositional Calculi**, *Mathematical Logic Quarterly*, Berlim, Alemanha,Volume 9, Edição 5-6, p. 67-96, 1969. Disponível em: http://fitelson.org/142/kripke_1.pdf. Acesso em 14 jan 2019.

MENDELSON, Elliott. **Introduction to Mathematical logic**. 6ª ed. 2015.

MORTARI, C.A., **Introdução à Lógica**: São Paulo – SP: Editora UNESP, 2001.

PENCO, C., **Introdução à Filosofia da Linguagem**: Ed. Vozes. 2006.

SOAMES, S. **Nomes, essência e possibilidade**. Tradução: L. H. Marques Segundo. Investigação Filosófica, volume E4, p. 1-34, 2016. Disponível em: https://periodicos.unifap.br/index.php/investigacaofilosofica/article/viewFile/5049/2255 Acesso em 31 jan. 2021.

SANTOS, R. Introdução. In: KRIPKE, S., **O nomear e a necessidade**. Tradução de Ricardo Santos e Teresa Felipe, Lisboa: Gradiva Publicações S.A., 2012.