



**UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA ACADÊMICA**  
**COORDENAÇÃO GERAL DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**MESTRADO EM DESENVOLVIMENTO DE PROCESSOS AMBIENTAIS**

**RIDELSON TAVARES DE MELO**

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA DISPERSÃO DE POLUENTES:**  
**Análise temporal da dispersão de esgotos descartados em trechos**  
**urbanos do Rio Capibaribe**

**Recife**

**2009**

**RIDELSON TAVARES DE MELO**

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA DISPERSÃO DE POLUENTES:  
Análise temporal da dispersão de esgotos descartados em trechos  
urbanos do Rio Capibaribe**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento em Processos Ambientais Universidade Católica de Pernambuco como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em **Desenvolvimento de Processos Ambientais**.

Área de Concentração: Desenvolvimento em Processos Ambientais

Linha de Pesquisa: Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima

**Recife**

**2009**

M528m

Melo, Ridelson Tavares de

Modelos matemáticos para dispersão de poluentes : análise temporal da dispersão de esgotos descartados em trechos urbanos do Rio Capibaribe / Ridelson Tavares de Melo ; orientador Emerson Alexandre de Oliveira Lima, 2009.

106 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Católica de Pernambuco. Pró-reitoria Acadêmica. Coordenação Geral de Pós-graduação. Curso de Mestrado em Desenvolvimento de Processos Ambientais, 2009.

1. Modelos matemáticos. 2. Água - Poluição. 3. Simulação (Computadores). 4. Água - Tratamento. 5. Saneamento. I. Título.

CDU 628.1

Melo, R. T.

Modelos Matemáticos para Dispersão de Poluentes: Análise temporal da dispersão de esgotos descartados em trechos urbanos do Rio Capibaribe, 2009, p. 107.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Católica de Pernambuco. Pró-reitoria Acadêmica. Curso de Mestrado em Desenvolvimento de Processos Ambientais, 2009.

Modelagem Matemática; Políticas de Saneamento; Recursos Hídricos.

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA DISPERSÃO DE  
POLUENTES:**

**Análise temporal da dispersão de esgotos descartados em  
trechos urbanos do Rio Capibaribe**

**Aluno: RIDELSON TAVARES DE MELO**

**Examinadores:**

---

Prof. Dr. Emerson Lima  
(Orientador – UNICAP)

---

Prof.Dr. Sergio Murilo Maciel Fernandes

---

Prof. Dr. Carlos Costa Dantas

## DEDICATÓRIA

Aos meus super-heróis, Severino Tavares e Carminha Anselmo, meus pais porque poucos na vida tiveram a chance de ter pais tão maravilhosos. Eles são meus melhores teóricos, pois suas teorias jamais serão refutadas...

A vocês, dedico cada página dessa obra!

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Severino Tavares e Carminha Anselmo, pois nunca deixam de me apoiar em todos os momentos da minha vida, dando força, carinho e zelo.

A Robson, Ronalde e Renata, meus irmãos, juntos ajudaram a escrever toda a minha história de vida. Eles acompanharam cada passo da construção desse projeto tão importante. Sem vocês eu não chegaria até aqui.

À minha inesquecível tia Maria, colaboradora em tantos “projetos” e “defesas” de minha vida, que nunca deixou de lançar o seu olhar carinhoso sobre mim.

À minha tia Elza Anselmo, exemplo de força e resistência frente às adversidades.

Ao meu tio Gilvan Anselmo por sempre acreditar na minha capacidade.

Ao casal Gilberto Anselmo e Carmoniza Anita, meus tios, pela ajuda na minha formação.

A Eduardo Antônio, por ter incentivado a minha caminhada.

À madre Maria Elizabeth de Carvalho, Colégio Vera Cruz, que nunca deixou de torcer por minha vitória, ficando feliz à cada degrau por mim galgado.

À minha amiga e eterna mestra Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vera Lúcia Pimentel (FOP/UPE), por ter acreditado em mim abrindo as portas no início de minha carreira como Cirurgião-Dentista, a você não tenho palavras que expressem o meu muito obrigado...

À Universidade de Pernambuco – UPE, por ter me acolhido em dois cursos os quais fazem parte de minha formação acadêmica: Licenciatura em Ciências Biológicas e Odontologia.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, pelo embasamento oferecido durante a Especialização em Ensino das Ciências em prol do meu Mestrado.

À Universidade Católica de Pernambuco – UNICAP, por ter dado base à construção desse sonho.

Aos meus colegas do mestrado, Ormiro, Cíntia, Roberto, Rosileide, Francisco, Luís, Selma Neide, Adamares e Alex, que fizeram mais brandos os desafios que enfrentamos durante o curso e que me revigoravam nos momentos em que o cansaço tentava me cercar. Vocês são especiais!

Ao amigo Ormiro, que além de colega de turma, tornou-se grande amigo e incentivador. Obrigado pela amizade!

Ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Emerson Lima que me repassou conhecimentos adquiridos durante tantos anos dedicados à ciência, junto comigo

desbravou o oceano teórico da Modelagem Matemática e da Computação. A você, professor, não encontro palavras para medir e agradecer pelas horas de orientação. Orientações essas que me fortaleceram na busca de um saber acadêmico de teor mais refinado e sólido. Verdadeiramente meu muito obrigado e minha eterna gratidão!

À amiga Marta Sueli Lucchesi, pela presença sempre amiga e afetuosa. Acompanhou a construção dessa dissertação incentivando a prosseguir sempre.

Aos meus professores do mestrado. A vocês deixo um sincero OBRIGADO pelas horas de dedicação e oblações acadêmicas.

A todo corpo funcional da UNICAP em especial aos que atuam no prédio do mestrado porque todos os dias me recebiam com um sorriso no rosto e desempenham exemplarmente suas funções para que nós tivéssemos um excelente dia. Obrigado pelos seus esforços!

Aos meus pacientes que entendiam os atrasos devido às constantes orientações, contribuindo assim com minha formação.

Aos meus colegas da escola que torceram por esse dia. Agradeço a torcida!

À bela cidade do Recife que proporcionou condições a esse carpinense a alcançar a realização profissional.

Ao amigo Rômulo Felipe pela contribuição na correção lingüística dessa pesquisa.

Aos meus amigos que sempre incentivam as realizações dos meus sonhos. Obrigado pela amizade constante!

A todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para minha realização.

Meu muito Obrigado!



## EPÍGRAFE

“Num universo indiferente ao amor e à dor, regido por forças agindo sobre átomos inanimados, eis que, num pequeno planeta, o terceiro em órbita em torno de uma modesta estrela, uma dentre bilhões de outras, esses átomos combinam-se para formar beija-flores, tubarões, lagostas, baleias e golfinhos, rosas e girassóis, sequóias e magnólias, mosquitos e borboletas, chimpanzés e seres humanos. Os humanos evoluem, organizam-se em grupos, começam a plantar e a domesticar animais, desenvolvem a escrita, perguntam-se sobre os céus, sobre as forças da natureza, procurando por respostas, por dar sentido à existência. Entendem que a vida é finita, que a morte é inevitável, que a essência da natureza é transformação. Olham para o mundo e, corajosos, tentam expandir seus horizontes construindo barcos, carroças, aviões, foguetes, viajar ao desconhecido. Sua curiosidade é insaciável...” (Marcelo Gleiser)

## RESUMO

É inegável que o avanço da tecnologia e o desenvolvimento industrial advindo deste trazem inúmeros benefícios para a humanidade, sobretudo, no que se refere à melhoria na qualidade de vida da população em geral. De fato, tais avanços são de tal ordem presentes na vida moderna que se torna difícil imaginar a vida sem alguns destes como, por exemplo, energia elétrica e água, amplamente disponíveis, saneamento básico e sistemas de distribuição e transporte, ainda que a maior parte da população humana se distribua em grandes centros urbanos, o crescimento demanda de recursos não renováveis tais como água e energia que parecem ser uma tendência mundial e irrevogável no curto prazo. Mesmo nos centros agrícolas, a mecanização e a introdução de práticas como a irrigação ampliam a velocidade de crescimento da demanda de tais recursos. Por outro lado, o cenário global não parece promissor uma vez que, para suprir a demanda crescente de uma população humana também crescente de mais de seis bilhões de habitantes, pode-se contar com apenas 0,02% da água disponível no planeta: aquela que se encontra em cenários de uso direto tais como rios, lagos e reservatórios subterrâneos economicamente acessíveis. Para agravar tal situação, considere-se o fato de que o mesmo cenário global indica forte crescimento da velocidade de degradação; gerando, de forma influenciada, sobretudo por novas realidades climáticas impostas também pela ação humana, uma crescente escassez deste recurso. Nesse contexto, o Brasil encontra-se, a um só tempo, em posição privilegiada e de risco com relação ao cenário global. Com efeito, o Brasil possui 12 regiões hidrográficas possuindo uma das maiores disponibilidades mundiais de água potável ou de fácil tratamento, contudo, dada que a taxa de urbanização em algumas destas bacias é superior a 90% e que menos de 20% do esgoto urbano nacional passa por algum tipo de tratamento antes do descarte final em algum rio ou no oceano, essas bacias estão sendo rapidamente degradadas e, no decurso de poucos anos, algumas delas podem se tornar inviáveis para o consumo humano ou utilização agrícola. Dessa forma, os principais problemas a serem tratados pelos mecanismos de gestão de recursos hídricos são: a poluição e posterior degradação da água disponível nas diferentes bacias hidrográficas e o gerenciamento da competição pelo recurso. Modelos matemáticos adaptados a modelagem de sistemas dinâmicos reais podem contribuir como ferramenta de tomada de decisão para medidas que resguardem a qualidade da água. O aprimoramento de modelos matemáticos, em hidrologia urbana, contribui para a redução de incertezas em estudos de diagnóstico de sistemas existentes, de concepção e de dimensionamento de soluções de poluição. Dado, portanto, que a maior causa de poluição direta de mananciais hídricos decorre do descarte inadequado de resíduos sanitários urbanos. Este projeto de pesquisa tem por objetivo realizar a modelagem matemática de tais descartes possibilitando a geração de cenários diversos e a elaboração baseada em tais cenários de políticas públicas de gerenciamento hídrico, controle do nível de poluição e geração de atos de infração. Tal modelo deve ser imediatamente aplicável - e será inclusive calibrado por dados da série histórica de medições disponíveis sob consulta a CPRH - a partes específicas do sistema hídrico composto pelos perfis urbanos dos rios Capibaribe e Beberibe em trechos a serem selecionados mediante critérios descritos ao longo do projeto

**Palavras-Chave:** modelagem matemática; políticas de saneamento; recursos hídricos

## ABSTRACT

It is undeniable that the advancement of technology and industrial development comes from this bring many benefits to humanity, especially with regard to improvement in quality of life of the general population. Indeed, such advances are such present in modern life that it is difficult to imagine life without some of these, such as electricity and water widely available, sanitation and distribution systems and transportation. While most of the human population is distributed in large urban centers, the growing demand for non-renewable resources such as water and energy seems to be a global trend in the short term and irrevocable. Even in agricultural centers, the introduction of mechanization and practices such as irrigation extend the speed of growth of demand for these resources. Moreover, the overall picture does not appear promising since, to meet growing demand from a growing human population also more than six billion people, you can count on only 0.02% of available water on the planet: that which is in direct use of scenarios such as rivers, lakes and underground reservoirs affordable. To make the situation even worse, consider is the fact that the same overall picture indicates strong growth in the rate of degradation generating, so influenced mainly by new realities weather also imposed by human action, a growing scarcity of the resource. In this context, Brazil is the only one time, a privileged position and risk with respect to global scenario. Indeed, Brazil has 12 river basin having one of the largest global availability of drinking water or easy treatment, however, given that the rate of urbanization in some of these basins be over 90% and that less than 20% of urban domestic sewage passes through some type of treatment before final disposal in a river or the ocean, such basins are being rapidly degraded and, in a few years, some of them may become viable for human consumption or agricultural use. Thus, the main problems to be addressed by mechanisms for management of water resources are: The subsequent degradation and pollution of water available in different river basins and the management of competition for appeal. Mathematical models suitable for modeling real dynamic systems can contribute as a tool for decision-making measures that regarded water quality. The improvement of mathematical models in urban hydrology, contributes to the reduction of uncertainties in the diagnostic studies of existing systems, design and dimensioning of solutions to pollution. Given therefore that the major cause of pollution direct a spring water flows from the improper disposal of urban waste health, this research project aims to carry out the mathematical modeling of such Descartes allowing the generation of various scenarios and development based on these scenarios, public policies for managing water, the level of pollution control and generation of acts of violation. This model should be immediately applicable - and even be calibrated by data from the historical series of measurements available on the consultation CPRH - to specific parts of the water system composed of the urban sections of rivers Beberibe and Capibaribe in excerpts to be selected by criteria described over design.

**Key Words:** Mathematical Modeling; Policies of Sanitation, Water Resources

# SUMÁRIO

DEDICATORIAS .....	04
AGRADECIMENTOS .....	07
EPÍGRAFE .....	09
SUMÁRIO .....	10
RESUMO.....	11
ABSTRACT.....	12
CAPÍTULO I.....	13
1.1 INTRODUÇÃO .....	14
1.2 OBJETIVOS .....	16
1.2.1 OBJETIVO GERAL .....	16
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	16
1.3 REVISÃO DA LITERATURA.....	17
1.3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	17
1.3.2 MODELOS MATEMÁTICOS .....	21
1.3.3 DERIVADAS.....	27
1.3.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA .....	31
1.3.5 SCILAB .....	31
1.3.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS .....	34
1.3.6.1 O QUE SÃO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	34
1.3.6.2 RESOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	37
1.3.6.3 EQUAÇÃO DO DECAIMENTO RADIOATIVO .....	39
1.3.6.4 MOVIMENTO OSCILATÓRIO .....	43
1.3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	47

1.3.7.1 MÉTODOS DE EULER.....	48
1.3.7.2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA.....	50
1.3.8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS .....	54
1.3.8.1 TIPOS DE EDP'S .....	56
1.3.8.2 DEFINIÇÃO DOS TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE 2ª ORDEM.....	56
1.3.9 DIFERENÇAS FINITAS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS .....	59
1.3.9.1 DIFERENÇAS FINITAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE POLUENTES.....	64
1.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	68
CAPÍTULO II.....	74
2.1 INTRODUÇÃO .....	79
2.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	79
2.3 MODELO SIMPLIFICADO DE BRAÇO DE RIO.....	81
2.4 CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO .....	83
2.5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....	88
2.5.1 REGIME DE ESCOAMENTO NULO .....	88
2.5.2 REGIME DE ESCOAMENTO CONSTANTE .....	89
2.6 SIMULAÇÃO LABORATORIAL.....	91
2.7 MATERIAIS UTILIZADOS.....	94
2.8 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO.....	94
2.9 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	103
2.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104

# CAPÍTULO I

## 1.1 INTRODUÇÃO

Muito mais que um recurso natural, a água assegura a vida e o equilíbrio dos diversos ecossistemas. Seu uso é indispensável para garantia da vida no planeta. Várias culturas e tradições têm nela um elemento essencial, por exemplo, o cristianismo, o judaísmo e o xamanismo fazem dela coadjutora de seus ritos. Isso eleva o valor de sua presença nas relações humanas, pois não se trata apenas de um mineral, mas símbolo de várias instâncias da vida. Os debates mais acirrados sobre sua importância emergiram no final do século XX em que a iminência de sua falta ganhou as pautas das discussões internacionais. Sua possível escassez tem posto em alerta governos e nações. Protegê-la é acima de tudo assegurar a vida no planeta.

A água é, portanto, um recurso natural de valor incontestável. Mais que um insumo indispensável à produção e um recurso estratégico para o desenvolvimento econômico, ela é vital para a manutenção dos ciclos biológicos, geológicos e químicos que mantêm em equilíbrio os ecossistemas. É, ainda, uma referência cultural e um bem social indispensável à adequada qualidade de vida da população (HISTÓRIA DO USO DAS ÁGUAS NO BRASIL, 2008; ANA, 2008).

Pode-se notar ainda que, em um dado sistema biológico, diversas cadeias de seres vivos interagem em ciclos de trocas de materiais e energia gerando diversas interdependências cujo equilíbrio dinâmico pode ser bastante delicado. Dos diversos componentes materiais de um ecossistema, sem dúvida, o mais importante é a água cuja disponibilidade em quantidade e qualidade determina, em menor ou maior grau, a própria existência desses ecossistemas (ALCOFORADO, 2006).

No entanto, durante muito tempo, a crença de que os recursos naturais, dentre eles, notadamente a água, seriam inesgotáveis custou à humanidade a destruição de florestas, extermínio de animais e plantas, além da poluição das águas e do ar. O crescimento de centros urbanos e industriais, que por muitas décadas se realizou muitas vezes de forma desordenada e sem um correto planejamento, mostra hoje suas consequências. Os efeitos da atividade humana na poluição de águas, solo e ar são atualmente temas de discussão e estudo em diversos centros de pesquisa, para se ter uma idéia da dimensão deste risco, durante o III Fórum Mundial das Águas, realizado em março de 2003 em Kyoto, no Japão, foi divulgado um estudo com previsões preocupantes, feitas pela Organização das Nações Unidas (ONU). Segundo o estudo, entre 2 bilhões e 8 bilhões de pessoas poderão sofrer com a falta de água potável ou com saneamento básico inadequado até a metade do século XXI. Todo esse conhecimento adquirido na área gerou maior conscientização sobre os riscos que

a civilização humana corre caso os recursos naturais existentes não sejam adequadamente preservados.

A eficiência do uso da água é também tema de grande preocupação entre órgãos gestores de recursos hídricos em nosso país. A preocupação de se alcançar o uso racional da água constitui uma meta a ser perseguida nas ações de planejamento e da gestão de recursos hídricos. Em ambiente de múltiplos usos, o bom conhecimento das necessidades dos diversos usuários e das disponibilidades hídricas é fundamental para uma boa gestão; entretanto, as incertezas hidrológicas, as variações das demandas e o grande número de variáveis representativas dos processos físicos, químicos e biológicos, conferem elevado nível de complexidade à análise dos sistemas de recursos hídricos.



## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 OBJETIVO GERAL**

O foco principal deste trabalho foi propor um modelo matemático capaz de simular, dado o regime de descarte de esgotos urbanos, bem como sua disposição geográfica em um dado rio de perfil geográfico e regimes de vazão conhecidos, como tal poluição é dispersada ao longo do tempo por esse regime de vazão levando em conta fatores sazonais e permitindo a elaboração de cenários diversos como medidas de contenção de descarte, medidas de diminuição de vazão e modificação do curso dos rios estudados. Os resultados desse modelo devem ser imediatamente aplicáveis ao contexto relativo à disposição urbana do Rio Capibaribe na região Metropolitana da Cidade de Recife.

### **1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Além da proposição e posterior estudo da modelagem matemática da dispersão de poluentes em sistemas hidrográficos de superfície, os seguintes objetivos foram também contemplados nesta pesquisa:

- Identificação e mapeamento da região de interesse sócio-econômico na qual foi aplicada a modelagem;
- Geração de um programa de computador (software) para automação destas simulações;
- Utilização do modelo para simulação da concentração de poluentes, notadamente, poluentes de origem orgânica, em situações diversas, identificando assim políticas efetivas de controle da concentração de poluentes críticos em níveis aceitáveis segundo a legislação vigente;

## 1.3 REVISÃO DE LITERATURA

### 1.3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O homem, durante toda a história, exerceu e exerce diversas formas de apropriação e transformação da natureza, gerando assim, muitas vezes, degradação do meio ambiente, pois seu extrativismo desenfreado provocou mudanças na biodiversidade, como desequilíbrio nas diversas formas de vida tanto animal como vegetal. As atividades de produção, desenvolvimento cultural e extrativismo estabeleceram um novo relacionamento entre a sociedade e a natureza. Após a Revolução Industrial estabeleceu-se uma nova realidade entre homem e natureza, os recursos naturais passaram a fazer parte do interesse econômico-produtivo. O desenvolvimento tecnológico, ao longo dos séculos, determinou o surgimento de novas necessidades humanas. Através das modificações ocorridas com a passagem da vida simples extrativista para uma sociedade organizada passou-se a ter um domínio maior sobre a produção e a natureza (TÁPIA, 2006).

Entre os séculos XV e XVI com a Expansão Marítima, um dos fatores determinantes para um país ser considerado rico ou pobre era a sua riqueza natural (Metalismo). A natureza tornou-se “moeda” econômica, pois sua diversidade marcava a entrada ou não de certa nação no rol dos poderosos. Sobre esse contexto histórico, Cirilo (2007) pontua que as riquezas naturais determinavam nos séculos XV e XVI a riqueza dos países, e sua busca gerou a procura desenfreada por novas estâncias produtoras mesmo que fosse através da dominação como no caso o Brasil (pau-brasil).

Todavia, como já mencionado, o avanço tecnológico e a busca por recursos naturais provocaram certo desequilíbrio ecológico, pois a busca por essas riquezas naturais não visavam ao desenvolvimento sustentável, o que gerou uma desarmonia na relação homem-natureza. A Revolução Industrial, no século XVIII, exigiu novas e severas formas de apropriação do meio ambiente. Nesse período, predominava o pensamento que tais recursos seriam inesgotáveis e que a preocupação com a finitude dos recursos naturais seria um mito distante da realidade vigente. O consumo somado com o extrativismo “selvagem” credenciaram uma realidade alarmante, pois o equilíbrio da biosfera começa a ser rompido em nome do consumismo. Recursos naturais já no século XX dão sinais de esgotamento de suas fontes como no caso do petróleo e, nesse contexto, começam a surgir rivalidades entre as nações em nome da subsistência que determinam o poder. Dentre os recursos naturais que começam a

dar anúncios preocupantes de escassez, está a água, mineral essencial para a garantia da vida e o equilíbrio ecológico. Ela que era considerada como abundante inesgotável começa a preocupar os governos internacionais. A ONU (Organização das Nações Unidas) organiza todos os anos reuniões para debater e apontar soluções para conter a crise aquífera mundial. A existência desse recurso é a garantia da vida no planeta. A ação antrópica é responsável pelo abalo nas relações homem e recursos hídricos como poluição, o que resulta reflexo na qualidade e quantidade das águas.

O problema da escassez de água potável é o resultado de uma série de fatores: econômicos, geográficos, demográficos, entre outros. Agravando ainda mais o problema da disponibilidade de água potável, o número alarmante de rios cujas águas encontram-se impróprias para o consumo devido ao despejo de efluentes domésticos e industriais é cada vez mais alto. Os rios são responsáveis em grande parte pelo abastecimento público e industrial. O fato do abastecimento ser suspenso diariamente em várias regiões do planeta, demonstra o reflexo da escassez cada vez maior da disponibilidade da água.

Mais ainda, há de se notar o fato de que a água doce é mal distribuída no Brasil, pois apesar de apresentar 13,7% da água doce disponível do planeta e dois terços do maior aquífero subterrâneo do mundo, o Aquífero Guarani, 80% das águas brasileiras encontram-se na Amazônia enquanto que São Paulo que possui 20% da população do país possui apenas 1,6% dos recursos hídricos (MACHADO, 2006).

Segundo Alegria; Diniz (2007), um dos fatores responsáveis que contribuem para a degradação das águas, é o acelerado desenvolvimento populacional o qual impulsiona a necessidade urgente de abastecimento e fornecimento para as diversas atividades. Os autores (*ibidem*) pontuam ainda que a matéria orgânica depositada, nos recursos hidrográficos, é um dos mais preocupantes problemas ambientais, pois põem em foco dois pontos cruciais: a emergência de desenvolvimento e a necessidade de preservação. A matéria orgânica lançada nas águas provoca a baixa qualidade dessa água ou seu não aproveitamento para a utilidade humana.

Alegria; Diniz (*op. cit.*) relatam ainda que essa presença material desequilibra não apenas o esgoto ou rio local, mas também toda a sua bacia hidrográfica. Outro fator preocupante apontado pelos autores diz respeito à saúde daqueles que se abastecem de tais recursos poluídos. O problema aquífero torna-se não apenas um problema de abrangência ambiental, mas também de nível social em relação à saúde pública. Esse problema afeta o homem tanto na relação com o meio ambiente como na questão orgânica, pois sua dependência à água é de caráter universal.

As altas taxas de doenças intestinais e outras doenças de países de baixa renda deve-se à ausência de abastecimento de água potável e de coleta de esgotos sanitários que são as principais responsáveis por esses índices. A precariedade no abastecimento de água potável obriga a população a utilizar águas que veiculam doenças, em sua maior parte poluídas por coliformes fecais. Estima-se que cerca de 8500 casos anuais de mortalidade infantil e de morbidade adicional sejam provocadas devido aos problemas de saneamento público e a ausência de água potável (SILVA; ALVES, 2003).

As atividades industriais são responsáveis pelo lançamento de resíduos sólidos e líquidos que são geradores de impactos ambientais negativos. Dentre essas atividades, destaca-se a agroindústria canavieira e um de seus efluentes, o vinhoto (CPRH, 2006).

Uma das principais causas da poluição do Rio Capibaribe está relacionada à ocupação desordenada, conseqüentemente ao lançamento diário, não só das populações ribeirinhas, de esgoto não tratado. O esgoto industrial também é uma realidade ainda persistente durante o percurso do rio. Os maiores problemas de despejo de efluentes industriais encontram-se no eixo Santa Cruz do Capibaribe/Toritama, pois, é nessa faixa que o Capibaribe recebe a maior carga de poluentes em seu curso (Rio Capibaribe, a Capivara Nordestina acesso em 08/04/2009).

Note ainda que o processo de erosão costeira afeta o equilíbrio ecológico do estuário e de seus manguezais, que são protegidos por lei. O manguezal é um ecossistema, que além de funcionar como uma proteção costeira do rio, também funciona como um importante berçário para a reprodução de diversas espécies dos ecossistemas marinhos, contribuindo para o equilíbrio ambiental e também como fonte de recursos financeiros que garante a subsistência das comunidades ribeirinhas (NETO, 2002).

O sistema de escoamento do rio é altamente influenciado pelo processo de erosão em áreas de alto índice de ocupação. Nessas áreas urbanas, ocorre um desequilíbrio e nas áreas em que apresentam uma maior declividade o processo de erosão é mais acentuado, enquanto nas regiões planas do rio, o processo de assoreamento é bem mais intenso, devido ao material carreado. A ocupação desordenada determina o agravamento do desmatamento e os aterros, e essa ocupação contribui ainda mais para o problema da erosão (ALCOFORADO, 2006).

Durante a Conferência das Nações Unidas sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento – RIO 92, o Poder Público Brasileiro assumiu a Educação Ambiental como um importante aliado na política ambiental brasileira.

A Política Nacional de Recursos Hídricos e o do Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos foram criados em 8 janeiro de 1997, com a Lei nº 9.433. O Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos é formado pelos: Conselho Nacional de Recursos Hídricos; Conselhos de Recursos Hídricos dos Estados e do Distrito Federal; Comitês de Bacia Hidrográfica; órgãos dos poderes públicos federais, estaduais e municipais, cujas competências se relacionem com a gestão de recursos hídricos; Agências de água e as organizações civis de recursos hídricos. Em 2000, foi criada a ANA (Agência Nacional das Águas) que foi incluída ao Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos (CIRILO, 2007).

A Lei nº 9.433 objetiva assegurar à atual geração e às futuras a necessária disponibilidade de água, em padrões de qualidade adequados aos respectivos usos; a utilização racional e integrada dos recursos hídricos com vistas ao desenvolvimento sustentável; a prevenção e a defesa contra eventos hidrológicos críticos de origem natural ou decorrentes do uso inadequado dos recursos naturais.

A gestão das águas afeta muitos aspectos da vida moderna e tem uma influência interdisciplinar, tanto nas tarefas tradicionais como a segurança e drenagem, como também a saúde e meio ambiente. Isso resulta na necessidade de uma abordagem integrada acoplada a modelos para diferentes subsistemas de elementos. Vários modelos hidrológicos já existem como modelos de superfície livre, modelos de fluxo e subterrâneos. Muitos programas de simulação hidrológicos subterrâneos acoplados a superficiais e de qualidade de água acoplados a quantidade de águas são bastante utilizados (KAMP; SAVENIJE, 2007).

O estudo sobre a análise do risco operacional sobre inundações, drenagem urbana e qualidade das águas dos recursos hídricos requerem estudos confiáveis, em que se reduza ao mínimo possível dos erros resultantes da não-linearidade das equações que regem, como os de evaporação e infiltração. Uma abordagem muito utilizada atualmente é a teoria multifractal para as sub-redes. Muitos modelos hidrológicos de comportamento envolvem certos pressupostos da matemática justificado pelos dados empíricos e físicos à base do raciocínio lógico (PATHIRANA; HERATH, 2002).

Para controlar a poluição dos recursos hídricos, um importante colaborador é a implementação de ações de prevenções da saúde e do meio ambiente, pois tem em vista a prevenção dos recursos de tais sistemas. Dessa forma, a modelagem matemática associada à realidade vigente de cada recurso hídrico pode contribuir na tomada de decisão para medidas as quais resguardem a qualidade e quantidade das águas.

Compreender o fluxo, a dispersão e a decomposição dos compostos presentes nos efluentes lançados em canais naturais é de extrema importância para a solução de vários problemas presentes no despejo de efluentes domésticos e industriais nos rios. Entre esses problemas, destaca-se a escolha do melhor ponto de emissão de um efluente, a determinação da distância necessária para a dispersão desse efluente e a distância para que ocorra a degradação das substâncias biodegradáveis presentes nesse lançamento. Entretanto, o mais importante é desenvolver ferramentas numéricas preditivas do impacto causado por novas emissões de efluentes em um rio e por outras situações que ponham em risco o equilíbrio ambiental (BATSCHULET, 1989; BENQUÉ; HAUGUEL; VIOLLET, 1982; CHRISTOFOLETTI, 1999; DALRYMPLE; KNIO, 2001).

Um modelo de simulação é um conjunto de algoritmos matemáticos e regras que representam processos físicos. Um modelo é utilizado para projetar ou prever parte da realidade. Para construir um modelo que é necessário para descrever uma parte específica da realidade através de um sistema. Um modelador descreve um rio por várias secções com um determinado perfil, para isso é importante definir vários parâmetros (KAMP; SAVENIJE, 2007).

Os modelos matemáticos adaptados à realidade contribuem no planejamento para tomadas de decisão para que seja mantida a qualidade das águas. Modelos matemáticos em hidrologia urbana cada vez mais aprimorados contribui para reduzir as incertezas nos estudos de diagnóstico dos sistemas existentes, de concepção e de dimensionamento das soluções para a poluição dos rios (ALEGRIA; DINIZ, 2007).

A relação do ser humano com a natureza não é uma relação de mão única, pois na verdade trata-se de uma relação na qual subjetivar as forças da natureza é ao mesmo tempo objetivar-se como homem, são dois momentos de um mesmo processo (CIRIO, 2007).

### **1.3.2 MODELOS MATEMÁTICOS**

Na busca de esclarecimentos, conhecimentos, novos fenômenos e eventos, o ser humano não os identifica somente pelas sensações ou pelas manifestações imediatas, mas recorre à reflexão e ao conhecimento acumulado, através da formulação de hipóteses e da estruturação de modelos. Dessa forma, a abstração constitui uma poderosa peça no exercício eterno de aquisição de conhecimento, uma vez que, para se compreender a imensa variedade de formas, estruturas, comportamentos e fenômenos residentes no universo, é necessário selecionar

aqueles de maior relevância para o problema objeto de investigação e elaborar para eles descrições adequadas. (SAYAO, 2001).

A modelagem de dados surge como ferramenta conceitual para o auxílio na organização, formalização e na padronização da representação de objetos do mundo real como seres, fatos, coisas, organismos sociais ou fenômenos. (BORGES, 1996).

Com o auxílio da matemática o homem utiliza representações que são capazes de explicar e interpretar fenômenos em estudo. A estas representações damos o nome de modelo. (SAYAO, 2001).

O uso da Matemática como linguagem simbólica conduz a uma representação da situação problema em termos matemáticos. Um modelo matemático pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representa uma situação, um fenômeno ou um objeto real a ser estudado. (SAYAO, 2001).

O modelo de dados é, portanto um conjunto de conceitos usados para descrever a estrutura de um determinado sistema. (BORGES, 1996).

Na construção de modelos, o que se objetiva é sua adequação a um determinado propósito. Os modelos, dependendo do caso podem ser adequados ou inadequados para uma certa utilização de forma que existem vários tipos de modelos. (BORGES, 1996).

Os Modelos Matemáticos destinados ao controle de poluentes e de qualidade de águas são ferramentas importantes na tomada de decisões no apoio a gestão de bacias hidrográficas. O planejamento e gestão dos recursos hídricos em um país de grandes extensões como o Brasil, geralmente, com bacias imensas, e um vasto conjunto de elementos naturais e antrópicos, é um importante modelo hidrográfico deve permitir a representação espacial da região, de forma a considerar fontes difusas juntamente com fontes pontuais de poluição.

O maior problema dos modelos é a avaliação da sua acuidade ou ajuste das suas previsões. Um segundo problema está relacionado com o estabelecimento de valores aos parâmetros do modelo e identificá-los com os parâmetros fisicamente mensuráveis do mundo real.

Com o uso da modelagem os experimentos laboratoriais e as observações de campo não podem ser desprezados, pois são de grande importância em um determinado experimento, principalmente quando se utiliza organismos vivos, onde o seu comportamento não pode ser previsto.

Os modelos aumentam em muito a eficiência por meio de diversas maneiras, pois através de suas previsões pode-se determinar a melhor forma de atuação na prática e os seus limites (TÁPIA, 2006).

Em 2004, Larentis analisou o impacto do desenvolvimento sobre a qualidade da água na bacia do rio Taquari-Antas, utilizando para isso um modelo distribuído de simulação hidrológica e de qualidade de água aplicável a grandes bacias (> 1000 Km<sup>2</sup>). Esse modelo utilizou ajustes de dados diários de vazão, concentração de nitrogênio, fósforo e coliformes fecais, obtidos de coletas trimestrais. Larentis estruturou o modelo IPH-MGBq (Modelo de Qualidade de Água em Grandes Bacias) em Quantidade (hidrológico) e Qualidade das águas. O ajuste com base na concentração dos poluentes na bacia do Taquari-Antas, foi satisfatório apesar dos valores máximos e mínimos não serem alcançados por serem singulares em um determinado instante, mas a estatística apresentou coerência com os perfis observados.

Kachiashvili *et al*, 2006, desenvolveram um software baseado na modelagem de distribuição da concentração de substâncias poluentes nos rios, devido a múltiplas fontes de substâncias poluentes. O modelo incluiu a equação de advecção-difusão e a difusão apenas.

Wang *et al*, 2004 verificou que os modelos matemáticos para avaliar a qualidade das águas fluviais possuíam uma aplicação limitada devido a dificuldade de preparação dos dados de entrada e de sua interpretação. Com isso, a gestão e a avaliação dos riscos de ações ficaram bastante limitadas. Através desse estudo, foi apresentado o Sistema de Informação Geográfica (GIS) um software para Rout, que prevê as concentrações químicas residuais de mais de 10000 pontos de tratamentos de água de pontos residuais (ETAR). As cargas das ETAR são calculadas a partir da média de escoamento diários dos produtos e esgotos da população existente na área de estudo.

Leal, Catalunha e Sediyaama (2003) desenvolveram um modelo matemático capaz de representar bacias hidrográficas e sua variação espaço-temporal. A bacia foi dividida em segmentos nesse modelo, e foram atribuídas variáveis e parâmetros capazes de representar suas características mais relevantes a cada segmento. Dessa forma, podem ser reproduzido os cenários hidrográficos, ambientais e econômicos de cada parte estudada, analisando assim ao longo do estudo suas características. A simulação espaço-temporal utilizando computadores foi possível através de modelos de bancos de dados dele derivados. Pode-se destacar desse estudo o processo de tomada de decisão na concessão da outorga dos recursos hídricos em bacias hidrográficas. Não só pode-se representar a dinâmica dos recursos hídricos através do modelo criado por Leal, Catalunha e Sediyaama, mas também outros tipos de sistemas de distribuição como líquidos e gases em condutos livres ou forçados.



As propriedades de cada segmento, como oferta dos recursos hídricos do corpo d'água (geográfica, hidráulica, geológicas, físicas, químicas, biológicas, ambientais e econômicas) bem como a demanda (agrícola, pecuária, industrial, urbana, transporte, energética e lazer) permitem através dessa abordagem avaliar o uso da água e o seu impacto ambiental, estabelecendo respostas quanto ao uso consciente e respeitando os limites de utilização sem causar impactos ambientais irreversíveis (LEAL, CATALUNHA, SEDIYAMA, 2003).

Sucupira, Pinheiro, Rosa (2006) realizaram uma análise morfométrica dividida em 4 etapas. Na primeira etapa trataram da ordenação ou hierarquização da rede de drenagem. A segunda etapa tratou da análise linear da rede de drenagem, compreendendo assim as medições efetuadas ao longo das linhas de escoamento. Na terceira fase foi realizada a análise real da bacia hidrográfica através do englobamento das médias pluviométricas, além das lineares. Na última fase, realizaram uma análise hipsométrica que compreendeu a distribuição altimétrica da bacia, utilizando a imagem digital CD, com composição RGB de satélite.

Através do estudo de Sucupira, Pinheiro, Rosa (2006) foi possível produzir primeiramente o Modelo Digital de elevação (MDE) utilizando as curvas de nível digitalizadas, transferindo todas as informações para o software ARCVIEW 8.3 em formato shapefile (SHP) o que possibilitou o seu estudo. O MDE apresentou-se como uma excelente ferramenta na execução de estudos geomorfológicos, oferecendo maiores detalhes e uma melhor percepção visual das formas de relevo, facilitando o cálculo dos parâmetros morfométricos. A análise morfométrica apresentou resultados que facilitaram a compreensão de forma integrada dos processos hidrogeológicos da bacia hidrográfica do Rio Acaraú.

Nihoul (1983), determinou um modelo matemático que inclui a determinação da concentração de nutrientes, metais tóxicos, pesticidas e os agentes patogênicos e o seu comportamento ao longo do rio. Através desse modelo é possível realizar o estudo do impacto das usinas nucleares ao longo do Rio Meuse, juntamente com a determinação da quantidade máxima de dejetos que podem ser lançados sem causar danos ambientais, satisfazendo a qualidade da água de acordo com os parâmetros dos regulamentos internacionais. O modelo proposto não é considerado apenas uma ferramenta científica que fornece informações e alternativas para decisões de gestão pública, porém também permite a previsão de danos ambientais antes que eles ocorram, sendo, portanto é uma aplicação fundamental proporcionada pelo modelo. A economia dos recursos hídricos e as necessidades são tomadas em consideração nas simulações realizadas pelo modelo.

Os métodos de proteção do ambiente podem ser comparados com isso possibilitando escolher o melhor projeto ambiental com o objetivo de manter a qualidade da água.

Para reduzir os danos e prejuízos devido às inundações foram construídos ao longo dos anos taludes às margens do Rio Surma na Índia. Estas obras de engenharia e a evolução tem sido benéfica para reduzir danos às propriedades e à intensificação da produção agrícola alimentar, mas deram origem a impactos adversos sobre o ambiente, tais como a redução da planície aluvial área, com conseqüente aumento do fluxo de água e inundações nível dentro do canal Embanked e mudança na circulação dos sedimentos porque mudou de canal hidráulico, drenagem. Os modelos matemáticos estão sendo cada vez mais utilizados pelos engenheiros e urbanistas nos países para avaliar e reduzir os danos nos rios.

Wahiduzzaman *et al* (2000) determinaram um modelo matemático-dimensional aplicado para simular as variações no nível da água e de descarga, no rio Surma. Os resultados mostram o potencial do modelo de simulação na avaliação o comportamento hidráulico do sistema fluvial. O modelo também é simulado o desempenho do sistema que dê aos dados de entrada como topografia, margens, etc. Esse modelo de simulação matemática constitui uma útil ferramenta computacional para o desenvolvimento, avaliação, controle e utilização dos recursos hídricos. O controle das inundações na área de estudo pode ser observado através da dragagem do rio. Para atenuar os prejuízos causados pelas inundações os taludes de planejamento dos recursos hídricos, gestão e design, assim como estudo do impacto de vários projetos existentes e propostos são determinados através do uso do modelo matemático.

Segundo Meyer (2001), para rios de grande porte como os rios da Amazônia internacional são propostos modelos de estudo através de subdivisões do compartimento único na largura do rio, com o uso de diversos compartimentos transversais. Nesse caso, é possível tratar com diferentes valores a passagem de poluente de um compartimento ao seguinte (na direção rio abaixo) para diferentes posições, respeitando a maior velocidade no centro do rio e velocidades bem menores à medida que se está mais próximo à margem. Esse tipo de abordagem, porém apresenta dificuldades devido à medida que aumenta a mobilidade do poluente no meio estudado, maior deveria ser o número de compartimentos necessários para continuar a visualizar o que ocorre, e isso sem que sejam modelados os principais fenômenos envolvidos. É preciso considerar, na modelagem, as variáveis espaciais e não apenas a variável temporal.

O modelo matemático de conservação de massa e a equação de difusão é o tipo mais trabalhado por grande parte dos pesquisadores de Ecologia Matemática, no campo que se convencionou chamar de Ecotoxicologia. O princípio básico dessa equação se baseia na taxa de variação da concentração da massa por unidade de tempo é igual à taxa de variação da massa que entra menos a que sai dessa região, a menos de sorvedouros ou fontes que possam aí existir. É importante salientar, também, que outros parâmetros podem variar no espaço, no tempo e até com a própria concentração do poluente. Em alguns casos, por exemplo, temos a difusibilidade podendo permanecer constante, ou variar no espaço ou ainda depender da concentração de poluente.

Machado (2006), desenvolveu um modelo Fluidodinâmico computacional tridimensional para simular a dispersão de substâncias solúveis em rios. O método dos volumes finitos foi utilizado para aproximar as equações de conservação de momento, de massa e de espécie química. O sistema de coordenadas cartesianas foi escolhido para representar o sistema. Foi utilizado um modelo algébrico de turbulência de ordem zero. O modelo de Streeter-Phelps foi usado para prever a concentração de substâncias orgânicas e de oxigênio dissolvido ao longo do rio. O modelo também pode prever o impacto causado pela ocorrência de múltiplos pontos de emissão no trecho estudado. O modelo matemático foi desenvolvido na linguagem Fortran. A forma de modelagem apresentada permite obter a determinação da porcentagem de efluente presente no escoamento ao longo de todo trecho estudado. A obtenção de um perfil de concentração em termos de porcentagem de efluente é interessante, particularmente no estudo apresentado, uma vez que se desejava traçar uma comparação dos resultados com dados de toxicidades existentes.

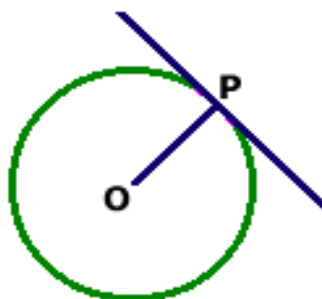
Em 1999 Lien *et al* propuseram um modelo de profundidade média bidimensional para simular as características do fluxo existentes em canais curvos. O modelo desenvolvido levou em consideração a existência de um fluxo secundário através da existência de um fluxo secundário determinado através de um fluxo de dispersão. O sistema de coordenadas utilizado foi o ortogonal curvilíneo. A validade do modelo foi comprovada através dos resultados obtidos com dados experimentais existentes. A ação do vento sobre as águas que provocam tensões de cisalhamento na sua superfície foi considerada nula. O fluxo secundário era provocado pelo desequilíbrio entre as forças centrífugas e de pressões transversais resultantes pela elevação da superfície da água. O campo de velocidade assumido foi de distribuição logarítmica. Nas fronteiras sólidas, a lei da parede foi aplicada fora da subcamada laminar e da camada de transição. Os resultados obtidos considerando o fluxo secundário e em condição de não-deslizamento apresentaram boa concordância com

os dados experimentais no caso de canais que apresentam curvatura média (MACHADO, 2006).

O método dos volumes finitos usados para estudar numericamente o comportamento em um fluido com escoamento através de um canal de seção transversal retangular que apresentava uma repentina nesta seção foram explorados nas equações de Navier-Stokes. Com uma expansão na razão 1:3 foram realizadas todas as simulações e as condições de contorno e de simetria foram determinadas para as paredes. Os resultados apresentados demonstraram uma zona de aparecimento de zonas de circulação após a expansão, não ocorreu nenhuma comparação com dados experimentais.

### 1.3.3 DERIVADAS

Os principais conceitos sobre derivadas foram introduzidas por Newton e Leibniz, no século XVIII. Tais idéias, já estudadas antes por Fermat, estão fortemente relacionadas com a noção de reta tangente a uma curva no plano. Uma idéia simples do que significa a reta tangente em um ponto P de uma circunferência, é uma reta que toca a circunferência exatamente em um ponto P e é perpendicular ao segmento OP, como vemos na figura abaixo:



A derivada de uma função  $y=f(x)$  num ponto  $x = x_0$ , é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica à curva representativa de  $y = f(x)$ , no ponto  $x = x_0$ , ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto  $x_0$ .

A derivada de uma função de uma variável é definida como um processo de limite. Considera-se a inclinação da secante, quando os dois pontos de intersecção com  $f(x)$  convergem para um mesmo ponto. Neste limite, a inclinação da secante se iguala à da tangente.

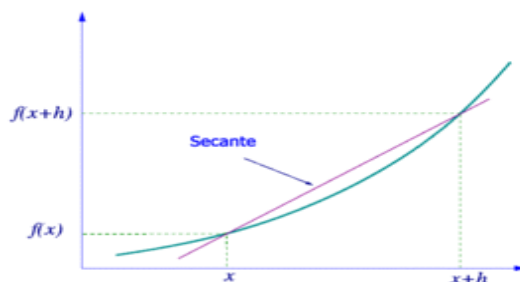


Figura 1 – Gráfico da inclinação da secante à curva de  $f(x)$

Essa idéia é expressa no quociente de Newton; onde  $h$ , isto é  $\Delta x$ , é a distância entre os pontos de intersecção da secante no eixo de coordenada  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Suponha que se queira encontrar a derivada de uma função  $f(x)$ , em  $x$ . Se aumentamos  $x$  em uma quantidade pequena,  $\Delta x$ , pode-se calcular  $f(x + \Delta x)$ . Uma aproximação da inclinação da tangente à curva é dada por  $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$ , que é uma forma de dizer: a mudança de  $f$  dividida pela mudança em  $x$ . Quanto menor  $\Delta x$  ficar, melhor a aproximação será. Matematicamente, se define a derivada como sendo o limite da razão acima quando  $\Delta x$  tende a zero.

Como a substituição simples de  $\Delta x$  por 0 resulta em divisão por zero, o numerador deve ser simplificado de tal forma que  $\Delta x$  possa ser fatorado e então cancelado com o denominador. A função resultante,  $f'(x)$ , é a derivada de  $f(x)$ .

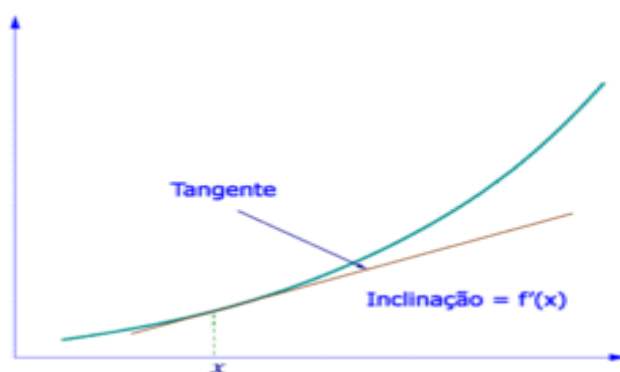


Figura 2 – Gráfico da inclinação da tangente à curva como a derivada de  $f(x)$

Podemos representar a derivada de uma função  $y=f(x)$ , também pelos símbolos:  $y'$   $dy/dx$  ou  $f'(x)$ .

A derivada pode ser usada para determinar a taxa de variação de alguma coisa devido a mudanças sofridas em uma outra ou se uma função entre os dois objetos existe e toma valores contínuos em um dado intervalo. Por exemplo a taxa de variação da posição de um objeto com relação ao tempo, isto é, sua velocidade, é uma derivada. A operação inversa da derivada é a Primitiva. Daí podemos afirmar logicamente que uma das primitivas da derivada de uma função tem como resultado a própria função.  $\int f'(x)dx = f(x) + C$ , em que  $C=$ Constante.

lezzi, Murakami, Machado (2005) definiu Derivada no ponto  $x_0$  como sendo uma função  $f$  definida em um intervalo aberto  $I$  e  $x_0$  um elemento de  $I$ . Chama-se derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se existir e for finito.

A diferença  $\Delta = x - x_0$  é chamada acréscimo ou incremento da variável  $x$  relativamente ao ponto  $x_0$ . A diferença  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  é chamada acréscimo ou

incremento da função  $f$  relativamente ao ponto  $x_0$ . O quociente  $\left[ \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

recebe o nome de razão incremental de  $f$  relativamente ao ponto  $x_0$ .

A derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  pode ser indicada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Quando existe  $f'(x_0)$  dizemos que  $f$  é derivável no ponto  $x_0$ . Dizemos também que  $f$  é derivável no intervalo  $I$  aberto quando existe  $f'(x_0)$  para todo  $x_0 \in I$ .

As derivadas são ferramentas úteis para examinar gráficos de funções. Em particular, os pontos no interior de um domínio de uma função de valores reais que sejam um extremo local terão a primeira derivada igual a zero. No entanto, nem todos os "pontos críticos" são extremos locais. Alguns são pontos de inflexão. A segunda derivada é a forma de avaliar esses pontos críticos: se a segunda derivada do ponto crítico é positiva o ponto é um mínimo local, se negativa, é máximo. Se é nula, o ponto é de inflexão ou parte de uma zona constante (possivelmente ainda um extremo local, mas não necessariamente).

Uma vez que os extremos locais tenham sido encontrados, torna-se geralmente fácil ter uma ideia do gráfico da função, uma vez que (no caso de domínio de uma só dimensão) ela será crescente ou decrescente de forma uniforme exceto nos pontos críticos, e logo (assumindo que é contínua), terá valores entre os valores nos pontos críticos em cada lado.

### 1.3.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo aberto  $I$ . Admitamos que exista a derivada de  $f$  no ponto  $x_0 \in I$ .

Dado um ponto  $x \in I$ , tal que  $x \neq x_0$ , consideramos a reta  $s$  determinada pelos pontos  $P(x_0, f(x_0))$  e  $Q(x, f(x))$ .

A reta  $s$  é secante com o gráfico de  $f$  e seu coeficiente angular é:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

portanto,  $\operatorname{tg} \alpha$  é a razão incremental de  $f$  relativamente ao ponto  $x_0$ .

A derivada de uma função  $f$  no ponto  $x_0$  é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$ .

### 1.3.5 SCILAB

O Scilab é um software grátis com código fonte aberto, uma ferramenta utilizada para o desenvolvimento de sistemas, controle automático e processamento de sinais, criado e mantido pelo INRIA.

O Scilab é uma aplicação informática de cálculo algébrico composta de três partes distintas, mas de fácil integração e utilização: um interpretador de comandos, funções Scilab pré-definidas e os toolboxes que são as livrarias de programas.



O Scilab apresenta um ambiente de trabalho com grandes potencialidades e de fácil compreensão. O fato de ser programável permite ao utilizador implementar suas próprias rotinas ou simplesmente adaptar outras já existentes, de forma a conseguir um maior rendimento desse software em situações mais específicas.

Para se instalar o Scilab, é bastante simples, basta apenas acessar o sítio na internet e permitir o download através de sua página.

Possui seu uso legalizado para o ensino e a pesquisa acadêmica, podendo comunicar-se com outros grupos. Permite ainda o desenvolvimento de programas especializados que podem integrar ao pacote de forma simples e modular através de bibliotecas.

Através da utilização do ambiente Scilab é possível resolver diversos problemas envolvendo matrizes, polinômios, razões de polinômios, funções de transferências, equações de estados e etc.

Funções primitivas básicas como álgebra linear, soluções de EDOs, otimização, controle automático e processamento de sinais são resolvidas através de simples comandos em frações de segundos.

O Scilab é também um ambiente de programação que permite a criação de novas funções ou bibliotecas pelo usuário, facilitando o seu uso. Possui o ambiente gráfico SCICOS, que permite a criação de diagramas de blocos e simulação. Permite a tradução para programas e toolboxes do Matlab.

A linguagem escritas das funções são utilizadas podem ser em C e Fortran. As ferramentas de programação são:

- Operadores =, <, >, <=, >= e <>;
- Laço for e laço while;
- Condicionais if – then – else e select – case;
- xi são os argumentos de entrada;
- yj são os argumentos de saída.

As funções podem ser definidas *in line* ou em arquivos (extensão *.sci*), podendo conter diversas funções.

As funções Scilab são também objetos válidos, partindo do princípio que são interpretadas corretamente pelo módulo central de execução da aplicação. Podem ser de dois tipos distintos: intrínsecas e criadas pelo utilizador. Em ambos os casos o seu reconhecimento pode ser efetuado pela seguinte estrutura constituinte obrigatória:

$$[< \text{obj} >=]\text{nome\_função}(\text{arg1}), (\text{arg2}) \dots)$$

Qualquer função é identificada pelo seu nome (maior parte em inglês) e obviamente única. Não podem existir duas funções com o mesmo nome, Encerrados entre parênteses, poderão existir mais de um argumento. Argumento é um elemento programático que promove a passagem de informação para a função, para ser processado por ela, de acordo com o objetivo que determinou a concepção e implementação dessa função. Existem regras que devem ser respeitadas pelos argumentos tais como: o número, o tipo de informação e tipo de entidade.

Os gráficos produzidos em 3D podem ser manipulados através do Metanet, facilitando assim a interpretação em diversos planos e cortes, de acordo com a necessidade da pesquisa. A escala e o estilo do gráfico são determinados pelo usuário, dependendo apenas do seu comando no momento de alimentar os dados no programa.

As molduras, legendas e subdivisões dos eixos podem ser determinadas pelo usuário bastando apenas que seja definidas pelos comandos, assim como a grade, títulos e seus parâmetros.

Um comando Scilab é uma designação atribuída às expressões interpretadas pelo núcleo central da aplicação e que desencadeiam uma de duas reações: de conformidade quando o comando está correto ou de erro quando não está.

## 1.3.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS FÍSICOS

### 1.3.6.1 O QUE SÃO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Em [matemática](#), uma **equação diferencial** é uma [equação](#) cuja incógnita é uma [função](#) que aparece na equação sob a forma das respectivas [derivadas](#). As equações diferenciais são essenciais para o campo da [Física](#).

As equações diferenciais dividem-se em dois tipos:

- Uma [equação diferencial ordinária](#) (EDO) contém apenas funções de uma variável e derivadas daquela mesma variável.
- Uma [equação diferencial parcial](#) (EDP) contém funções com mais do que uma variável e suas [derivadas parciais](#).

As equações diferenciais são usadas para construir modelos matemáticos de fenômenos físicos tais como na dinâmica de fluidos e em [mecânica celeste](#). Deste modo, o estudo de equações diferenciais é um campo extenso na [matemática pura](#) e na [matemática aplicada](#).

Equações diferenciais têm propriedades intrinsecamente interessantes tais como:

- solução pode existir ou não;
- caso exista, a solução é única ou não.

As equações diferenciais têm inúmeras aplicações práticas em medicina, engenharia, química, biologia e outras diversas áreas do conhecimento. As soluções destas equações são usadas, por exemplo, para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos.

Estudando física, é comum modelar o desenvolvimento ao longo do tempo de um sistema mediante o uso de equações, por exemplo, no ensino médio quando um veículo move-se em linha reta e a velocidade é tida como constante  $V_0$  a partir de um ponto inicial  $S_0$  então podemos encontrar sua posição após o tempo decorrido  $t$  (contado a partir do instante que o veículo inicia seu movimento no ponto  $S_0$ ) pela equação:

$$S = S_0 + V_0 t$$

O caso citado acima é apenas um caso particular de um caso mais geral no qual o veículo move-se em velocidade uniformemente variada, i.e, com aceleração constante  $a$  em linha reta (no caso anterior,  $a = 0$ ) que é dada pela equação descrita abaixo:

$$S = S_0 + V_0 t + a \frac{t^2}{2}$$

Na realidade, o que ocorre é que os veículos passam por momentos de aceleração, desaceleração, velocidade constante e os valores de aceleração e velocidade podem variar entre um momento e outro.

Isaac Newton (1643-1727) em 1687 propôs a seguinte abordagem:

quando um corpo se move a velocidade  $V=V(t)$  determinada durante todo o tempo do percurso. Se o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre duas medições de velocidade, nos tempos ( $t_1$  e  $t_2$ ) for muito pequeno a velocidade ficará praticamente constante e igual a  $V=V(t_1)$  e podemos escrever  $S_1 = S_0 + Vt_1$  e  $S_2 = S_0 + Vt_2$  obtendo que o *intervalo percorrido* pelo corpo será de, aproximadamente,  $\Delta S = S_2 - S_1 \cong V\Delta t$  o que

implica que  $V \cong \frac{\Delta S}{\Delta t}$ . Quando a taxa de variação relativa entre duas grandezas (distância percorrida e tempo) e as respectivas grandezas são tomadas arbitrariamente próximas é o conceito de **derivada** conforme estudado por Newton. Conforme visto, Newton estabeleceu que

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \quad (1)$$

Nessa expressão,  $\frac{dS}{dt}$  substitui a razão  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$  possibilitando assim que tanto  $S$  quanto  $t$  são tomados próximos um do outro o quanto se queira. O símbolo de aproximação  $\cong$  na expressão do quociente é substituído por uma igualdade.

Se  $f : (a,b) \rightarrow R$  é função contínua definida no intervalo aberto  $(a,b)$  no qual  $a < b$  então podemos definir que  $\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  desde que o limite do lado direito exista<sup>1</sup>.

Equações como  $V(t) = \frac{dS}{dt}$  (1), que relacionam uma função (naquele exemplo,  $V=V(t)$ ) com a derivada de outra função (naquele exemplo,  $S=S(t)$ ) são

---

<sup>1</sup> Nos cursos universitários de cálculo tal conceito, suas propriedades e aplicações são estudadas com muito mais detalhamento.

chamadas de equações diferenciais. A **ordem** de uma equação diferencial é o grau da mais alta derivada envolvida na equação. Vejamos alguns exemplos:

- a)  $\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$  (equação de Torricelli, mede como o nível  $y(t)$  de um reservatório varia conforme o tempo se o mesmo perde água a uma taxa de vazão  $h$  exclusivamente sob a ação da gravidade)
- b)  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$  (Lei do resfriamento de Newton, mede como a temperatura  $T(t)$  de um corpo varia com o decorrer do tempo se o mesmo está resfriando em um ambiente de temperatura constante igual a  $T_0$  e a condutividade térmica do material é igual a  $k > 0$ )
- c)  $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$  (Movimento massa-mola, mede como a deformação  $x(t)$  de uma mola com constante de Hooke igual a  $k$  varia quando ela é ligada a uma massa  $m$  e é sujeita a um amortecimento cuja constante é  $c$  e a uma força que varia ao longo do tempo segundo a função  $F(t)$ )

As equações a e b são de 1ª ordem (apenas uma derivada, assim como a do

exemplo  $V(t) = \frac{dS}{dt}$  (1) ) e a equação c de 2ª ordem. Se substituirmos as aparições

da derivada por potências de uma variável fictícia  $z$  (ou seja  $y = z^{(0)}$ ,  $\frac{dy}{dt} = z^{(1)}$ ,

$\frac{d^2y}{dt^2} = z^{(2)}$ , ...) e considerarmos a variável  $t$  como constante numa equação diferencial

e o resultado for um **polinômio** na variável  $z$ , então diremos que a equação é **linear**, nos demais casos, a equação é chamada de não linear. Em uma equação linear, se o termo independente do polinômio for constante então a equação é dita linear e homogênea. Nos exemplos anteriores:

- a)  $\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$ . Faça  $y = z^{(0)}$  e  $\frac{dy}{dt} = z^{(1)}$  obtendo  $z^{(1)} - h\sqrt{z^{(0)}} = 0$  de forma que a equação **não é linear**. Observa-se que não há termo independente de  $z$ , por isso a equação é **homogênea**

b)  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ . Faça  $T = z^{(0)}$  e  $\frac{dT}{dt} = z^{(1)}$  obtendo  $z^{(1)} + kz^{(0)} - kT_0 = 0$  que

é a equação de um polinômio em  $z$ . O termo independente de  $z$  é  $-kT_0$  que só é nulo se  $T_0=0$ , portanto, somente neste caso, a equação é **linear e também homogênea**.

c)  $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$ . Fazendo  $x = z^{(0)}$ ,  $\frac{dx}{dt} = z^{(1)}$  e  $\frac{d^2x}{dt^2} = z^{(2)}$  obteremos

$mz^{(2)} + cz^{(1)} + kz^{(0)} - F(t) = 0$ . O termo independente de  $z$  é  $-F(t)$  que só é nulo se o sistema massa-mola não sofrer influência externa (por exemplo, uma massa ligada a uma mola sob ação da gravidade mas sem atrito). Neste caso, a equação é **linear e homogênea**. Se o sistema estudado sofrer influência externa, a equação será **linear e não homogênea**.

As técnicas estudadas resolvem analiticamente uma equação diferencial se a equação for linear, homogênea e de baixa ordem. Com outros casos (por exemplo, mesmo na equação de Torricelli) ou precisaremos empregar uma mudança de variáveis ou técnica avançada de solução por funções especiais (funcionando apenas em alguns grupos restritos de equações diferenciais) ou então devemos utilizar uma **técnica ou método numérico** de solução.

O que entendemos por **solução** de uma equação diferencial e as técnicas numéricas, podem ser exemplificadas, através da obtenção de **soluções aproximadas**. Resolveremos detalhadamente duas equações diferenciais clássicas: A equação do decaimento exponencial (presente em processos radioativos) e a equação pendular (presente em processos periódicos ou oscilatórios).

### 1.3.6.2 RESOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No tocante ao exemplo do movimento do móvel: Percebe-se que a equação

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \quad (1)$$

fornece uma maneira de, dada a **função**  $V(t)$  que representa como o corpo muda a velocidade ao longo do tempo, encontrar a equação de como sua distância ao ponto  $S_0$  muda. Analisaremos alguns casos abaixo:

Caso 1, Velocidade permanecendo constante: Este caso equivale a fazer  $V(t)=V_0$  e já sabemos que a solução é  $S = S_0 + V_0 t$ . Se, no entanto não soubéssemos *disto* poderíamos fazer:

$V(t) = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S(t) = \int V(t)dt = \int V_0 dt = V_0 t + K$  onde utilizamos o teorema fundamental do cálculo para passar da derivada para a integral e usamos a tabela de integração (vide apêndice) para calcular a última integral.

As equações Integrais são, grosso modo, inversas das derivadas onde o termo “a grosso modo” foi utilizado porque quando uma função possui inversa ela (a inversa) é **única** o que não é o caso da integral. Funções diferentes podem ter a mesma integral porém sabemos que, neste caso, elas diferem (as integrais) uma da outra por um valor constante e indeterminado (o termo K da equação acima presente em todas as integrais primitivas dadas no apêndice).

No exemplo supracitado, empregado de forma geral – em todas as equações diferenciais – a solução é dada por uma **função** e não por um número (o que é natural, pois estamos calculando como a distância S varia ao longo do tempo) e esta função possui um termo *indeterminado* que somente é conhecido com base no estudo do problema original.

Neste caso, no tempo  $t=0$  sabemos que  $S(0)=S_0$ . Substituindo este conhecimento na equação  $S(t) = V_0 t + K$  teremos  $S_0 = S(0) = V_0 \times 0 + K \Rightarrow K = S_0$  o que conduz ao resultado já conhecido  $S = S_0 + V_0 t$ .

Caso 2, A velocidade variando de forma constante: Equivale a fazer

$V = V_0 + at$ . Substituindo na expressão da solução  $S(t) = \int V_0 + at dt = V_0 t + a \frac{t^2}{2} + K$

e fazendo  $S(0)=S_0$  como no caso anterior obteremos o resultado conhecido

$$S = S_0 + V_0 t + a \frac{t^2}{2}$$

Caso Geral: Percebe-se que uma vez de posse da **expressão integral** da solução, neste caso,  $S(t) = \int V(t)dt$  podemos calcular a solução **qualquer que seja** a

expressão de  $V(t)$ . Por exemplo, se  $V(t) = V_0 + at + bt^2$  (um caso no qual a própria aceleração varia e que não é estudado no ensino pré-universitário) encontraríamos a

expressão  $S(t) = \int V_0 + at + bt^2 dt = V_0 t + a \frac{t^2}{2} + b \frac{t^3}{3} + K$  e usando a **condição**

**inicial**  $S(0)=S_0$  obteríamos a solução geral  $S(t) = S_0 + V_0t + a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{3}$ , podemos repetir este procedimento qualquer que seja a expressão de  $V(t)$  desde que saibamos calcular a integral  $\int V(t)dt$  (por exemplo, se sua expressão for tabelada como as expressões constantes no apêndice).

Mesmo quando a solução não é tabelada (ou mesmo conhecida) podemos sempre encontrar uma **aproximação numérica** da solução mediante técnicas numéricas de integração tais como a técnica de Simpson, por exemplo.

Os casos em que podemos encontrar uma “fórmula” para solução (mediante técnicas matemática avançadas ou mediante funções tabeladas) são chamados de **casos analíticos** e, infelizmente, são a minoria na prática. Enquanto que nos não-analíticos são resolvidos de forma aproximada por algum método numérico. Antes de registrar as técnicas numéricas mais simples para resolução de equações diferenciais (nas quais sabemos ou não uma expressão integral) vejamos mais dois casos interessantes que ilustram alguns outros aspectos das equações diferenciais:

### 1.3.6.3 EQUAÇÃO DO DECAIMENTO RADIOATIVO

O Decaimento Radioativo é a desintegração de um núcleo através da emissão de energia em forma de radiação. A radiação é um tipo de emissão de energia que pode se propagar por meio de partículas (radiação corpuscular) ou por meio de ondas eletromagnéticas (radiação eletromagnética).

De acordo com a física de partículas, decorrido o chamado tempo-de-meia-vida de um isótopo radioativo, sua massa ativa cai a metade. Assim, essa massa em um dado instante é proporcional a massa ativa no instante imediatamente anterior o que é descrito pela chamada lei de decaimento

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\lambda M(t) \quad (2)$$



Não devemos repetir o procedimento que usamos no caso do veículo em movimento, pois a expressão resultante seria  $M(t) = \lambda \int M(t) dt$  e a função  $M(t)$  que queremos calcular encontra-se de forma insolúvel tanto no lado esquerdo quanto no lado direito da igualdade.

Casos iguais a esses são bem comuns, mesmo entre os analíticos. Pode-se

observar, no entanto, que a equação  $\frac{dM(t)}{dt} = \lambda M(t)$  (2) é linear e homogênea e, nos cursos de cálculo avançado, mostra-se que, se a equação linear e de primeira ordem for do escrita como<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Então sua solução<sup>3</sup> é dada pela expressão:

---

<sup>2</sup> Esta forma é chamada de forma geral do problema de valor inicial (PVI) para equações lineares de 1ª ordem (homogêneas ou não)

<sup>3</sup> Nos cursos de cálculo avançado, é estudado o chamado Teorema da Existência e Unicidade o qual garante que, em condições muito gerais, só há uma solução de uma dada EDO satisfazendo as condições iniciais, ou seja, se encontrarmos, por alguma técnica qualquer, uma solução, podemos ter certeza de que não há outras a procurar.

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4)$$

Embora seja uma expressão complexa

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4),$$

permite, uma vez conhecida a expressão de P(x) e Q(x) calcular a expressão de y(x). As integrais (definidas) que aparecem nesta expressão são particularmente úteis, pois permitem um fácil cálculo numérico utilizando ferramentas tais como o Scilab. No decaimento radioativo, porém, é simples o suficiente para efetuarmos as integrações envolvidas na expressão

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4)$$

utilizando uma tabela de integração. Vejamos:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ equivale, para o decaimento radioativo, a } \begin{cases} \frac{dM}{dt} = \lambda M \\ M(t_0) = M_0 \end{cases} \text{ onde a}$$

variável x é substituída pela variável t, a função y pela função M(t) e M<sub>0</sub> é a massa inicial do isótopo radioativo. Comparando as expressões, conclui-se ainda que

$$\begin{aligned} P(x) &= P(t) = \lambda \\ Q(x) &= Q(t) = 0 \end{aligned} \quad \text{Substituindo agora na expressão}$$

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4):$$

$$M(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t -\lambda d\xi\right) \left\{ \int_{t_0}^t \left[ 0 \times \exp\left(\int_{x_0}^t -1 ds\right) \right] dt + M_0 \right\} = \exp(-\lambda(t-t_0)) \{M_0\} = M_0 \exp(\lambda(t_0-t))$$

assim:

$$M(t) = M_0 \exp(\lambda(t_0-t))$$

Em que o fato de  $Q(t) = 0$  anulou a integral entre os  $\{ \}$  e, na primeira integral, a variável  $t$  foi substituída por  $\xi$  para não confundir-se com a variável tempo ( $t$ ).

O Scilab possui a expressão

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4)$$

implementada como o método interno ode (um pequeno manual do Scilab é dado no

apêndice). O código no Scilab que calcula a expressão

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(t)dt\right) \left\{ \int_{x_0}^x \left[ Q(t) \exp\left(\int_{x_0}^t P(s)ds\right) \right] dt + y_0 \right\} \quad (4)$$

a partir da equação

diferencial dada pela expressão 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$
 segue como exemplo:

```
function [ydot]=PVI_linear_1aOrdem(x,y)
    ydot=funcaoQ(x)-y.*funcaoP(x);
endfunction;

function [sol]=Solucao_PVI(x0,y0,x,npontos)
    //Solucao do PVI com condição inicial y(x0)=y(0) de x0 a x calculada em n pontos
    sol=ode(y0,x0,PontosX,PVI_linear_1aOrdem)
endfunction;
```

Figura 3: Código do Scilab para cálculo da expressão 4 dados os códigos das funções  $P(x)$  e  $Q(x)$

A fim de verificar a precisão das aproximações numéricas envolvidas, façamos  $M_0 = 1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $t_0=0$  e  $t = 5$  na solução exata  $M(t) = M_0 \exp(\lambda(t_0 - t))$  e na solução aproximada pelo Scilab com o método ode. O código completo da expressão, neste caso, é:

```
x = 5; //aqui x faz o papel da variável t
lambda = 0.01;
x0 = 10; //xo=Mo no decaimento exponencial
x = 5; //aqui x faz o papel da variável t
npontos=10;

function [valor]=funcaoP(x)
    valor=-lambda;
endfunction;

function [valor]=funcaoQ(x)
    valor=0;
endfunction;

function [ydot]=PVI_linear_1aOrdem(x,y)
    ydot=funcaoQ(x)-y.*funcaoP(x);
endfunction;

function [sol]=Solucão_PVI(x0,y0,x,npontos)
    //Solucão do PVI com condição inicial y(x0)=y(0) de x0 a x calculada em n pontos
    PontosX=linspace(x0,x,npontos);
    sol=ode(y0,x0,PontosX,PVI_linear_1aOrdem)
endfunction;
```

Figura 4 - Código completo do Scilab

E, realizando os cálculos e visualizando (usando a função plot do scilab) as duas soluções:

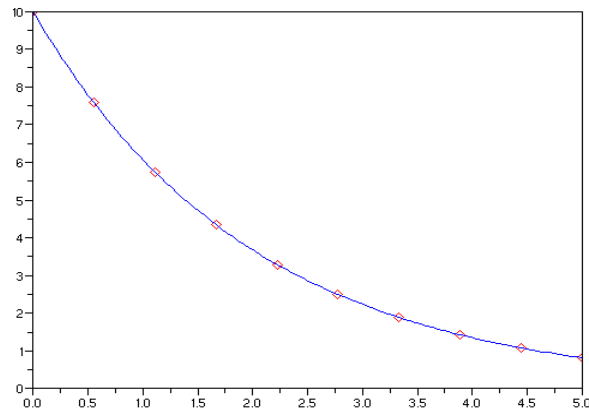


Figura 5: A linha contínua indica o valor exato da solução. Os pontos marcados foram as aproximações calculadas pelo Scilab. O erro entre ambas, no pior caso, foi menor que  $10^{-4}\%$

### 1.3.6.4 MOVIMENTO OSCILATÓRIO

Os fenômenos oscilatórios estão associados as soluções da chamada equação pendular. O estudo da equação pendular envolve sobretudo a teoria das [equações diferenciais](#) e das [integrais elípticas](#).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y \quad (5)$$

As equações como a equação  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y$  (5) fazem parte de uma classe mais ampla de equações diferenciais chamadas de equações diferenciais lineares de 2ª ordem cuja formulação geral é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Quando  $f(x)$  é identicamente nulo chamamos a equação de homogênea e quando  $p(x)=p$  e  $q(x)=q$  ( $p$  e  $q$  constantes) chamamos de equação linear a coeficientes constantes. Note que o problema de valor inicial, neste caso, precisa de **duas** condições iniciais (uma

sobre o valor inicial da função e outra sobre o valor inicial de sua derivada simbolizada pela notação  $\frac{dy}{dx} = y'(x)$ .

Há uma teoria específica sobre o caso de equações lineares com coeficientes constantes (homogêneas ou não em qualquer ordem) mas não há, como no caso 1ª ordem, uma fórmula analítica para o caso geral. Um método comumente utilizado para aproveitar parte da teoria do caso de 1ª ordem é fazer a adição de uma nova variável

$$z = \frac{dy}{dx} \text{ que permite escrever a equação } \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (6)$$

como o sistema de equações de primeira ordem:

$$(7) \quad \begin{cases} z = \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x) - q(x)y \end{cases}$$

À custa do aumento do número de variáveis. Observe que podemos reescrever (7) na notação vetorial como

$$\frac{d\vec{z}}{dx} = A(x)\vec{z} + F(x)$$

$$\text{onde } \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \text{ e } F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{e as condições iniciais são } \vec{z}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

O que pode, facilmente, ser entendido para qualquer número de variáveis.

Embora não exista uma fórmula específica para resolver equações diferenciais

lineares ou não de 2ª ordem, no caso específico da equação  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y$  (5) a solução analítica é conhecida e igual a:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x), & \text{se } \lambda > 0 \\ C_1 + C_2x, & \text{se } \lambda = 0 \\ C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x), & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Onde:

$$\bullet \begin{cases} C_1 = \frac{2y_0' \sqrt{\lambda x_0} + \lambda y_0 \exp(2\sqrt{\lambda x_0})}{\lambda(\exp(\sqrt{\lambda x_0}) + \exp(3\sqrt{\lambda x_0}))} \\ C_2 = \frac{y_0(\exp(2\sqrt{\lambda x_0})) - 2y_0' \sqrt{\lambda x_0} \exp(\sqrt{\lambda x_0})}{1 + \lambda \exp(2\sqrt{\lambda x_0})} \end{cases} \quad \text{se } \lambda > 0$$

$$\bullet \begin{cases} C_1 = y_0 - x_0 y_0' \\ C_2 = y_0' \end{cases} \quad \text{se } \lambda = 0$$

$$\bullet \begin{cases} C_1 = \frac{2\sqrt{x_0} y_0' \sin(\sqrt{|\lambda|}x_0) - y_0 \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|}x_0)}{\sqrt{|\lambda|}(\sin(|\lambda| x_0) + \cos(|\lambda| x_0))} \\ C_2 = \frac{2\sqrt{x_0} y_0' \cos(\sqrt{|\lambda|}x_0) + y_0 \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|}x_0)}{\sqrt{|\lambda|}(\sin(|\lambda| x_0) + \cos(|\lambda| x_0))} \end{cases} \quad \text{se } \lambda < 0$$

As constantes no Scilab, a mesma função ode pode aproximar numericamente a solução quando a equação diferencial é escrita na forma vetorial. Os exemplos que seguem, verificam a precisão da aproximação nos seguintes casos:  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$  com as condições iniciais  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $y_0' = 1$ . O script do Scilab para cada caso é apresentado abaixo bem como o gráfico da solução encontrada versus a solução real.

```
//CODIGO PARA CALCULO DA SOLUCAO DO PVI DE 2ª ORDEM
lambda = -1;
x0 = 0;
y0 = 0;
y1 = 1;
x = 5; //aqui x faz o papel da variável t
npontos=100;
```

```

function [valor]=funcaoP(x)
    valor=0;
endfunction;

function [valor]=funcaoQ(x)
    valor=-lambda;
endfunction;

function [valor]=funcaoF(x)
    valor=0;
endfunction;

function [valor]=funcaoA(x)
    valor=[0,1,-funcaoQ(x),-funcaoP(x)];
endfunction

function [ydot]=PVI_linear_2aOrdem(x,Z)
    ydot=funcaoA(x)*Z+funcaoF(x);
endfunction;

function [PontosX,sol]=Solucao_Aproximada_PVI()
//Solucao do PVI com condiçao inicial y(x0)=y(0), y'(x0)=y1 de x0 a x calculada em n pontos
    PontosX=linspace(x0,x,npontos);
    Yo=[y0;y1];
    sol=ode(Yo,x0,PontosX,PVI_linear_2aOrdem)
endfunction;

function [PontosX,sol]=Solucao_Exata_PVI()
    PontosX=linspace(x0,x,npontos);
    if lambda<0 then
        A=zeros(2,2);
        A(1,1)=cos(sqrt(-lambda)*x0);
        A(1,2)=sin(sqrt(-lambda)*x0);
        A(2,1)=-sqrt(-lambda)*sin(sqrt(-lambda)*x0);
        A(2,2)=sqrt(-lambda)*cos(sqrt(-lambda)*x0);;
        CC=inv(A)*[y0;y1]; C1=CC(1);C2=CC(2);
        sol=C1*cos(sqrt(-lambda)*PontosX)+C2*sin(sqrt(-lambda)*PontosX);
    elseif lambda>0 then

```



```

A=zeros(2,2);
A(1,1)=exp(sqrt(lambda)*x0);
A(1,2)=exp(-sqrt(lambda)*x0);
A(2,1)=sqrt(lambda)*exp(sqrt(lambda)*x0);
A(2,2)=-sqrt(lambda)*exp(-sqrt(lambda)*x0);
CC=inv(A)*[y0;y1]; C1=CC(1);C2=CC(2);
sol=C1*exp(sqrt(lambda)*PontosX)+C2*exp(-sqrt(lambda)*PontosX);
else
A=zeros(2,2);
A(1,1)=1;
A(1,2)=x0;
A(2,1)=0;
A(2,2)=1;
CC=inv(A)*[y0;y1]; C1=CC(1);C2=CC(2);
sol=C1+C2*PontosX;
end;
endfunction

```

Figura 6 - Código do Scilab

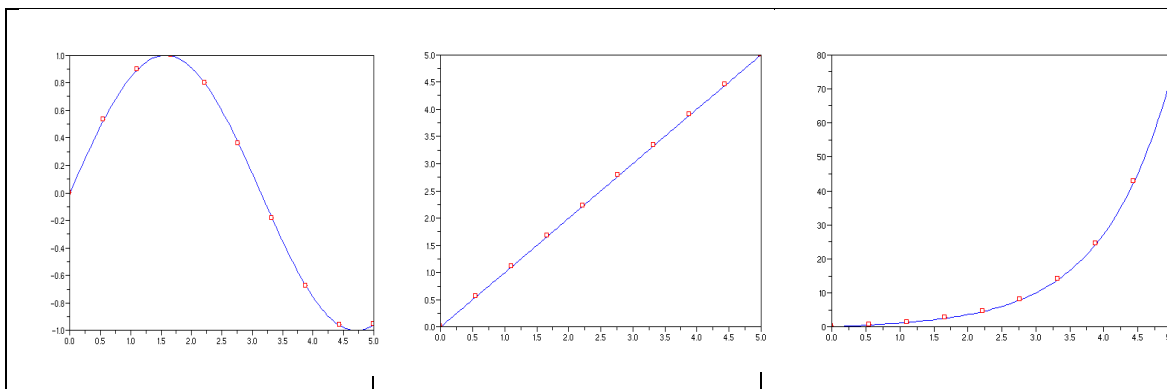


Figura 7: A linha contínua indica o valor exato da solução do PVI de 2ª Ordem  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y$  (5) para  $\lambda = -1$  (esquerda),  $\lambda = 0$  (centro) e  $\lambda = 1$  (direita). Os pontos marcados foram as aproximações calculadas pelo Scilab. O erro entre ambas, no pior caso, foi menor que  $10^{-3}\%$

### 1.3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES IFERENCIAIS

Em geral, não podemos resolver analiticamente mesmo as equações diferenciais mais simples ou, quando podemos obter tais soluções, em termos de precisão, isto não nos fornece resultados muito melhores que as técnicas de aproximação numérica.

Neste tópico, analisaremos a teoria geral dos métodos de aproximação utilizados, por exemplo, pelo Scilab para solução numérica de equações diferenciais. A teoria supracitada será empregada nesta dissertação para aproximação das soluções da equação de dispersão de poluentes em meios líquidos.

A teoria aqui discutida se refere especificamente a Problemas de Valor Inicial da forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (8)$$

(por exemplo, com relação ao problema linear  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

escreveríamos  $f(x, y) = Q(x) - P(x)y$ , mas pode ser facilmente generalizada para o caso geral de equações de mais alta ordem pelo método discutido na seção *Movimento Oscilatório*, i.e., mediante a introdução de variáveis auxiliares.

### 1.3.7.1 MÉTODOS DE EULER

Conhecendo-se as condições iniciais (primeiro valor da incógnita na lista) pode-se obter, para um  $\Delta t$  pequeno, o valor seguinte desta lista a partir da derivada temporal. A partir desse novo valor recalcula-se a derivada e desta um terceiro valor para a lista. Procede-se assim, sucessivamente, até o tempo final. Esta derivada temporal é dada, obviamente, pela própria equação diferencial que se quer integrar. É a classe mais simples dentre os métodos numéricos de aproximação de soluções de equações diferenciais. Baseiam-se em substituir a derivada  $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$  pelo quociente do lado direito da equação anterior para algum valor de passo ( $h$ ) pequeno. Ou seja, começando de  $y(x_0) = y_0$  calculamos

$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h \frac{dy}{dx} = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$ . Repetindo o processo,

calculamos, a partir de  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y(x_1 + h) = y(x_1) + h \frac{dy}{dx} = y(x_1) + hf(x_1, y_1)$ .

O processo é repetido calculando o valor da função solução  $y(x)$  para os pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  onde  $x_j = x_0 + jh$  mediante a seguinte equação de recorrência:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hf(x_j, y_j)$$

Mesmo que para valores de  $h$  pequenos, tal técnica tende a acumular um erro da ordem de  $h^2$  o que significa que se dobrarmos o valor de  $h$  (menos pontos a serem calculados) multiplicaremos por 4 o erro acumulado. Tal comportamento é chamado de instabilidade numérica da solução.

Métodos como o anterior nos quais a equação de recorrência só utiliza pontos conhecidos (neste caso, os valores de  $x_j$  e  $y_j$ ) da equação de recorrência são conhecidos como **Métodos Explícitos**. Métodos explícitos tendem a ser mais sensíveis a problemas de estabilidade e propagação de erros do que os métodos implícitos.

O método implícito de Euler consiste em substituir a equação de recorrência original por:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1})$$

Note que o valor desconhecido  $y_{j+1}$  aparece em ambos os lados da equação o que fornece um **sistema de equações na incógnita**  $y_{j+1}$  cuja solução é valor de  $y$  no ponto desejado. Ainda que o método implícito também apresente erro da ordem de  $h^2$  ele é, ao contrário do método explícito, estável, ou seja, erros de precisão ou arredondamento não se propagam ao longo dos cálculos.

O código Scilab relativo ao método explícito de Euler e simulações que ilustram deficiências de tal método seguem abaixo:

//CODIGO DO MÉTODO EXPLICITO DE EULER
---------------------------------------

```

x0=0;
y0=1;
h=0.5;
npontos=8;
function [z]=funcaoF(x,y)
//Modifique aqui para diferentes equações diferenciais
z=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
endfunction

function [PontosX,sol]=Euler_Explicito()
sol=zeros(1,npontos+1);
PontosX=h*(0:npontos);
sol(1)=y0;
for i=2:(npontos+1),
    sol(i)=sol(i-1)+funcaoF(PontosX(i),sol(i-1));
end;
endfunction;

function [PontosX,sol]=Valor_Scilab()
PontosX=h*(0:npontos);
sol=ode(y0,x0,PontosX,funcaoF);
endfunction;

scf();

[pxa,sola]= Euler_Explicito();
[pxe,sole]= Valor_Scilab();
plot(pxe,sole,'b'); //solução exata
plot(pxa,sola,'r'); //solução aproximada

```

Figura 8 - Código Scilab relativo ao método explícito de Euler

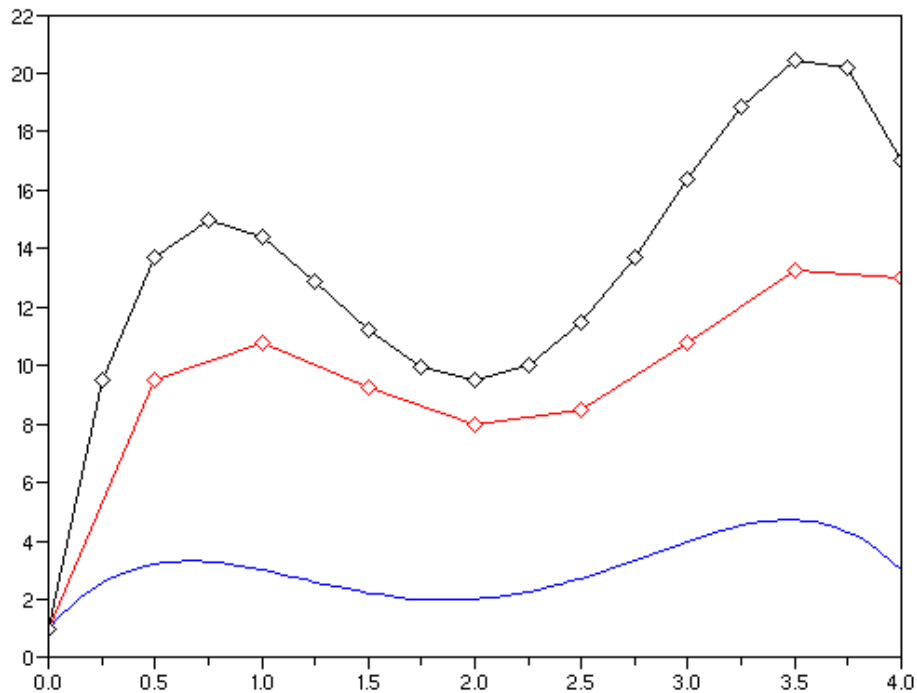


Figura 9: Em azul, solução exata<sup>4</sup> do PVI  $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$  com  $y(0) = 1$ . Em vermelho, valor calculado para  $h = 0.5$ . Em preto, valor calculado para  $h = 0.25$ . Observe que diminuir o passo não implica necessariamente em melhoria na precisão da solução.

### 1.3.7.2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

O método de Euler pode ser refinado quando tomamos a inclinação média para extrapolar a função até o próximo ponto. O método de Runge-kutta leva essa idéia mais longe e usa a média ponderada das inclinações no intervalo.

A forma mais comum de aproximação numérica das soluções de equações diferenciais segue a seguinte formulação geral

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{l=1}^s b_l k_l \quad (9)$$

$$k_l = f \left( x_j + c_l h, y_j + \sum_{m=1}^s a_{l,m} k_m \right)$$

<sup>4</sup> Na verdade, solução calculada pelo Scilab. A solução exata difere desta em menos de  $10^{-3}\%$ .

O valor de  $s$  é dito ordem do método<sup>5</sup> e a tabela

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,s} & \cdots & a_{s,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} \quad (10)$$

cujos valores das entradas determinam os diferentes métodos, é chamada de *matriz de Butcher*.

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{l=1}^s b_l k_l$$

$$k_l = f \left( x_j + c_l h, y_j + \sum_{m=1}^s a_{l,m} k_m \right) \quad (9)$$

Métodos baseados em

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,s} & \cdots & a_{s,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} \quad (10)$$

são chamados de **Métodos de Runge-Kutta**

e incluem métodos como os de Euler (implícito e explícito) como subcasos. Vejamos os mais comuns:

- **Método de Euler Explícito**

De primeira ordem ( $s = 1$ ) com matriz de Butcher  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

- **Método de Euler Implícito**

De primeira ordem ( $s = 1$ ) com matriz de Butcher  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

- **Método de Runge-Kutta Explícito de 3ª Ordem**

<sup>5</sup> Não confundir com a ordem da equação diferencial que, nesta formulação, é sempre igual a 1 (um)

De terceira ordem ( $s = 3$ ) com matriz de Butcher  $\left\{ \begin{array}{c} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{array} \right\}$

- **Método de Runge-Kutta Explícito de 4ª Ordem**

De quarta ordem ( $s = 4$ ) com matriz de Butcher

$$\left\{ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{array} \right\} .$$

É também chamado de **método clássico** e escrito geralmente na forma padrão:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

Sendo o método implementado pelo Scilab na função ode<sup>6</sup>.

Em todos os métodos explícitos, temos a matriz central na matriz de Butcher triangular inferior. Nos casos de métodos baseados em tabelas cuja matriz central não sejam triangulares inferiores são geralmente chamados de **métodos de Lobato** ou métodos de Runge-Kutta implícitos. O método de Euler implícito é também conhecido como método Euler reverso. Para problemas nos quais a função  $f(x, y)$  da equação diferencial são contínuas e suaves o mais comum é o chamado método de Lobato IIIA cuja matriz de Butcher é dada por:

<sup>6</sup> Na verdade, a função ode no Scilab utiliza o método implícito de Runge Kutta de ordem 4 com passo adaptativo que é o método mais preciso e com menor instabilidade numérica no caso geral.

$$\begin{Bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

O passo  $h$  é fixo, para todos os exemplos anteriores. Existe uma classe de métodos numéricos chamada de **métodos de Predição e Correção** que modificam o passo  $h$  em cada iteração tornando-o maior em regiões de pouca instabilidade numérica e menor em regiões nas quais as instabilidades exijam maior precisão e menor margem de erro. Tais técnicas não serão discutidas aqui mas seguem a mesma linha geral.

Segue código Scilab para o método explícito de Runge-Kutta de 4ª ordem e simulações ilustrando sua precisão.

```
x0=0;
y0=1;
h=0.5;
npontos=8;

function [z]=funcaoF(x,y)
//Modifique aqui para diferentes equações diferenciais
z=-2*x^3+12*x^2-20*x+8.5;
endfunction

function [PontosX,sol]=RK4()
sol=zeros(1,npontos+1);
PontosX=h*(0:npontos);
sol(1)=y0;
for i=2:(npontos+1),
    k1=funcaoF(PontosX(i-1),sol(i-1));
    k2=funcaoF(PontosX(i-1)+h/2,sol(i-1)+h*k1/2);
    k3=funcaoF(PontosX(i-1)+h/2,sol(i-1)+h*k2/2);
    k4=funcaoF(PontosX(i-1)+h,sol(i-1)+k3*h);
    sol(i)=sol(i-1)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
end;
endfunction;

function [PontosX,sol]=Valor_Scilab()
PontosX=h*(0:npontos);
sol=ode(y0,x0,PontosX,funcaoF);
endfunction;
```



```

scf();
[pxa,sola]= RK4();
[pxe,sole]= Valor_Scilab();

plot(pxe,sole,'b'); //solução exata
plot(pxa,sola,'r'); //solução aproximada
plot(pxa,sola,'rd');

```

Figura 10 - Código Scilab para o método explícito de Runge-Kutta de 4ª ordem

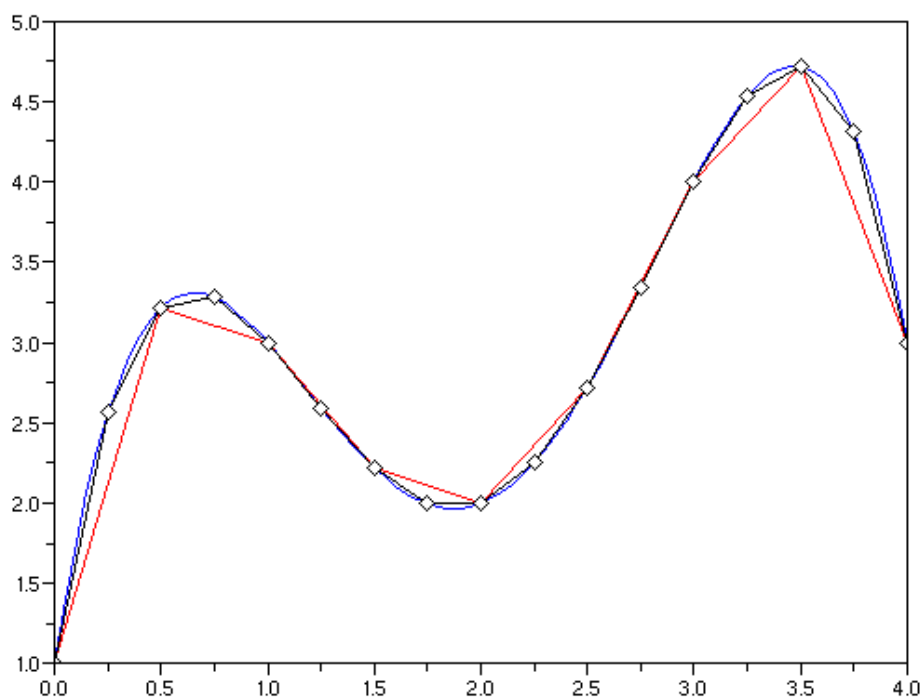


Figura 11: Em azul, solução exata do PVI  $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$  com  $y(0) = 1$ . Em vermelho, valor calculado para  $h = 0.5$  com o método explícito de Runge-Kutta de 4ª Ordem. Em preto, valor calculado para  $h = 0.25$ . Observe praticamente não há diferença entre os valores calculados e exatos (erro menor que  $10^{-2}\%$ ).

### 1.3.8 Equações Diferenciais Parciais

As equações do tipo  $y = F(x)$  possuem apenas uma variável, conforme os casos estudados até agora. Devido as derivadas serem consideradas apenas naquela variável, por exemplo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right.$$

São PVI's nos quais a função  $y = y(x)$  é derivada na variável  $x$ , na primeira equação, uma vez e na segunda equação duas vezes.

Geralmente os problemas práticos possuem uma quantidade muito maior de variáveis. Na temática deste trabalho, por exemplo, queremos entender como a concentração (função) de um poluente se comporta ao longo do tempo (uma variável) em cada ponto de uma dada região do espaço (mais três variáveis espaciais), ou seja, manipularemos equações envolvendo funções com , pelo menos, 4 variáveis.

Quando um problema envolve uma variável apenas, tem seu comportamento determinado de forma única (teorema da existência e unicidade), sob hipóteses bem simples, pelas condições iniciais. Mais especificamente, se  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  é uma equação diferencial de ordem  $n$  (neste caso  $y^{(k)} \equiv \frac{d^k y}{dx^k}$  significa que diferenciamos repetidamente a função  $y$ ,  $k$  vezes<sup>7</sup>) então todo seu comportamento depende das condições iniciais das variáveis no lado direito da equação, ou seja, depende dos valores de  $x_0, y_0 = y(x_0), y_1 = y'(x_1), \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(x_{n-1})$  sendo, por esta razão, chamados de Problemas de Valor Inicial ou PVI.

---

<sup>7</sup> Não confundir com  $y^k = \underbrace{y \times y \times \dots \times y}_{k \text{ vezes}}$

Em equações envolvendo mais variáveis, contudo, isto em geral não é verdade, por exemplo, o comportamento da concentração de um poluente ao longo do tempo depende do valor desta concentração **em toda região** – e não apenas em alguns pontos - no tempo inicial e também de como, ao longo do tempo, o poluente é removido ou reinserido na região. Tais problemas são chamados de Problemas de Valores de Contorno, conforme veremos adiante.

As equações diferenciais que envolvem apenas **uma variável**, são denominadas **Equações Diferenciais Ordinárias** ou simplesmente EDO's. Os problemas tratados anteriormente são todos exemplos desta categoria. Quando existem diversas variáveis envolvidas, mas apenas uma delas é utilizada para derivação também denominamos a equação de ordinária.

Equações que envolvem derivações em mais de uma variável são chamadas de **Equações Diferenciais Parciais** ou EDP's e seu tratamento, analítico ou numérico, é bem mais complexo que o caso ordinário.

### 1.3.8.1 TIPOS DE EDP'S

A teoria relativa a EDP's pode ser simplificada dividindo-as em categorias. Cada categoria é trabalhada, do ponto de vista analítico ou numérico, por técnicas específicas as quais, não raro, não funcionam em EDP's das demais categorias, por exemplo, uma técnica numérica para uma EDP parabólica terá, em geral, muito pouca aplicação em uma EDP hiperbólica. Cada categoria possui um **problema padrão** (em geral simples) cujo comportamento se repete para os demais membros da mesma categoria de forma que este problema padrão é usado geralmente como exemplo de casos mais complexos de uma mesma categoria.

### 1.3.8.2 DEFINIÇÃO DOS TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE 2ª ORDEM

Uma vez que para cada ordem de EDP's temos diferentes categorias e que este trabalho refere-se especificamente a EDP's de 2ª ordem, consideraremos doravante apenas EDP's desta ordem.

Inicialmente, consideraremos apenas uma variável espacial ( $x$ ) e uma variável temporal ( $t$ ) ou duas variáveis espaciais ( $x$  e  $y$ ) e nenhuma variável temporal. Nestes termos, uma **equação diferencial parcial de 2ª ordem** é uma equação do tipo:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu + G = 0 \quad \text{onde} \quad u = u(x, t),$$

$A = A(x, t)$ ,  $B = B(x, t)$ ,  $\dots$ ,  $G = G(x, t)$  são funções contínuas e com todas as derivadas parciais contínuas até 2ª ordem (chamamos de classe  $C^2$ ) em uma região  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  simplesmente conexa<sup>8</sup>. No caso de duas variáveis espaciais reescrevemos a

equação anterior como  $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$  e

$$u = u(x, y), \quad A = A(x, y), \quad B = B(x, y), \quad \dots, \quad G = G(x, y).$$

Conforme a notação padrão,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$  - ou seja, a  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$

derivada com relação a uma dada variável é definida considerando as demais variáveis como constantes. As regras usuais de derivação continuam valendo, com as devidas adaptações, a este caso. Definições análogas ao caso de uma variável valem para derivadas de mais alta ordem.

O **discriminante** de uma EDP deste tipo é a função  $\Delta = (\Delta(x, t) \text{ ou } \Delta(x, y)) = B^2 - 4AC$  que pode assumir diferentes valores conforme variamos  $x$ ,  $y$  e  $t$ .

Se, em toda região  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  tivermos  $\Delta < 0$  a equação diferencial é chamada de **Elíptica**. O problema padrão para equações elípticas é a **equação do potencial** ou **equação de Poisson** no plano (duas variáveis espaciais e independentes do tempo)

---

<sup>8</sup> Chamamos uma região de simplesmente conexa se 1) Dois pontos quaisquer da região podem ser conectados por uma curva contínua contida na região; 2) Qualquer curva fechada simples contida na região possui seu interior também contido na região. A grosso modo, uma região é simplesmente conexa quando for composta de um único “pedaço” e sem “buracos” em seu interior.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$$

$$A = C = 1 \text{ e } B = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$$

Equações elípticas geralmente estão associadas a problemas estacionários (ou seja, que não variam no tempo) como, por exemplo, a distribuição ponto a ponto de tensões em uma viga que suporta uma carga fixa.

No caso de, em toda região  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  o valor de  $\Delta = 0$ , diremos que a equação diferencial é **Parabólica**. O problema padrão para equações parabólicas é a **equação da difusão** ou **equação do calor** no plano (uma variável espacial e a solução varia ao longo do tempo)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

$$A = a^2, B = C = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times a^2 \times 0 = 0$$

Equações parabólicas geralmente estão associadas a problemas não-estacionários como, por exemplo, a propagação de calor em uma barra de metal (se aquecermos uma barra de metal, em cada ponto a temperatura vai variar ao longo do tempo) ou a difusão de poluentes em um rio (uma dada quantidade de poluente vai se dispersar de forma que sua concentração, em cada ponto do rio, será variável em função do tempo). O termo  $\alpha = a^2$  é uma constante positiva chamada de difusividade e mede a velocidade da mudança da solução  $u(x, t)$  ao longo do tempo, por exemplo, no problema da dispersão de poluentes em meios líquidos, valores elevados de  $\alpha$  indicam que o poluente rapidamente se dispersa enquanto que valores pequenos de  $\alpha$  indicam poluentes pouco solúveis e, portanto, com dispersão mais lenta.

Finalmente, quando  $\Delta > 0$  a equação é dita **hiperbólica**. O problema padrão hiperbólico é a equação de D'Alembert ou **equação da propagação de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x, t)$$

$$A = 1, B = 0 \text{ e } C = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{c^2}\right) = \frac{4}{c^2} > 0$$

Equações cujo sinal de  $\Delta$  varie ao longo da região  $X$  são ditas **mistas** e são estudadas, geralmente, subdividindo a região para estudo de cada tipo separadamente.

Neste trabalho, a equação modelo de difusão de poluente em três dimensões espaciais é a equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(-\alpha \nabla C) + \text{div}(\vec{V}C) + \sigma C + F(\vec{x}, t) \text{ onde } C = C(\vec{x}, t) \text{ e } \vec{x} = (x, y, z).$$

Os **operadores diferenciais** *divergente* e *gradiente* são definidos, respectivamente por

$$\text{div}(G(\vec{x}, t)) = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}$$

$$\nabla(H(\vec{x}, t)) = \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad \text{onde } G(\vec{x}, t) = (G_1(\vec{x}, t), G_2(\vec{x}, t), G_3(\vec{x}, t)) \text{ é um}$$

campo vetorial e  $H(\vec{x}, t)$  é função com valores reais ambas definidas em algum domínio simplesmente conexo  $X \subseteq R^4$ .

Considerando o caso de uma variável espacial apenas, teremos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + V \frac{\partial C}{\partial x} + C \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \sigma \right) + F(\vec{x}, t)$$

$$A = \alpha, B = C = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \text{ (equação parabólica)}$$

Por esta razão, nosso estudo será limitado as propriedades relativas as equações parabólicas.

### 1.3.9 DIFERENÇAS FINITAS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Para entender o método, vamos aplicá-lo a uma equação mais simples, como por exemplo, a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que é a equação (parcial, parabólica de 2ª ordem) de condução do calor (assumiremos que  $k > 0$ ).

Inicialmente, fixemos uma grade de pontos a serem calculados em  $x$ , digamos  $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ . Os pontos  $x_0$  e  $x_{m+1}$  são os extremos do intervalo. Por exemplo, se dividirmos o intervalo  $[0,10]$  em 6 pontos, suas coordenadas serão:  $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 8, x_5 = 10$  o valor de  $m$  será então 4 significando que teremos dois pontos de borda ( $x_0 = 0$  e  $x_5 = 10$ ) e 4 pontos intermediários.

Para cada um dos pontos intermediários, queremos acompanhar a evolução da temperatura ao longo do tempo em duas situações:

1. (condições de fronteira ou *Condições de Dirichlet*) Se a temperatura ao longo do tempo nos pontos  $x_0$  e  $x_{m+1}$  é conhecida.

Por exemplo, em uma barra de metal de 10 cm como acima, conhecido o valor da condutividade – digamos se a barra é de alumínio, este valor é de  $0,835 \text{ cm}^2/\text{s}$  e sabendo que a temperatura nas bordas -  $x_0 = 0$  e  $x_5 = 10$  - são mantidas constantes, respectivamente, em  $0^\circ \text{ C}$  e  $100^\circ \text{ C}$  e que a temperatura inicial da barra é de  $0^\circ \text{ C}$ , qual a evolução na temperatura a medida que o calor se propaga do ponto quente  $x_5 = 10$  ao ponto frio  $x_0 = 0$

2. (condições de contorno na derivada ou *Condições de Neumann*) Se a variação da temperatura nos pontos  $x_0$  e  $x_{m+1}$  é conhecida.

Por exemplo, nas condições anteriores, sabemos que a temperatura no ponto quente diminui  $1^\circ \text{ C}$  a cada segundo e a do ponto aumenta  $0.5^\circ \text{ C}$  a cada segundo.

Para tanto, temos de especificar os pontos *no tempo* nos quais o cálculo da temperatura em *cada* ponto *no espaço* será feita. Um exemplo seria, no caso anterior, acompanhar a cada 0.1 segundo a temperatura ponto a ponto. Se fizermos este acompanhamento por 1 segundo teremos mapeado cada um dos 4 pontos intermediários em  $x$  em 10 pontos no tempo totalizando 40 pontos para cálculo da temperatura.

Denote então por  $T_i^l$  a temperatura do ponto  $x_i$  no tempo  $l$  (por exemplo, para saber a temperatura em  $x = 4$  na metade do 1º segundo calcularíamos  $T_2^5$  pois  $x_2 = 4$  e  $t = 0.5\text{seg}$  equivale a  $l = 5$ ). Usando as aproximações das derivadas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}$$

Na equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Obteremos:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}$$

O que implica que

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \left( \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l) \quad (11)$$



Que permite – **conhecendo a temperatura em um instante t no tempo em um dado ponto e em seus vizinhos** – encontrar a temperatura deste ponto no instante seguinte.

Note que tal abordagem é **explícita** sendo nada mais nada menos que uma manifestação do método de Euler para o caso de EDP's. O termo  $\lambda = \left( \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \right)$  determina a estabilidade das soluções e diversos autores recomendam que  $\lambda < \frac{1}{6}$  para evitar propagação de erros e problemas de estabilidade e convergência das soluções<sup>9</sup>, ou seja, fixado a precisão desejada em  $x$ , a precisão que devemos utilizar em  $t$  fica fixada em  $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{6k}$  ou se fixarmos que o acompanhamento deve ser feito em intervalos constantes de valor  $\Delta t$  o acompanhamento em  $x$  deve ser feito em intervalos maiores que  $\Delta x > \sqrt{6k\Delta t}$ . Tais restrições não estão presentes nas abordagens implícitas mas isto esta liberdade de escolha da precisão no espaço ( $\Delta x$ ) de forma independente na precisão no tempo ( $\Delta t$ ) é obtida a custas de algoritmos bem mais complexos que fogem dos objetivos deste estudo.

Os scripts e figuras a seguir ilustram o uso da equação

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \left( \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l) \quad (11) \quad \text{ao problema exemplo citado}$$

anteriormente, isto é,

em uma barra de metal de 10 cm como acima, conhecido o valor da condutividade – digamos se a barra é de alumínio, este valor é de  $0,835 \text{ cm}^2/\text{s}$  e sabendo que a temperatura nas bordas  $-x_0 = 0$  e  $x_5 = 10$  - são mantidas constantes, respectivamente, em  $0^\circ \text{ C}$  e  $100^\circ \text{ C}$  e que a temperatura inicial da barra é de  $0^\circ \text{ C}$ , qual a evolução na temperatura a medida que o calor se propaga do ponto quente  $x_5 = 10$  ao ponto frio  $x_0 = 0$

Para o qual sabemos que a solução analítica (exata<sup>10</sup>) é

<sup>9</sup> Neste artigo, utilizamos  $\lambda = 1/10$

<sup>10</sup> Note que a solução exata não pode ser calculada pois o somatório possui infinitos termos, no entanto, dado o fator exponencial negativo que multiplica cada termo, a contribuição da soma a partir do 20º termo é tão pequena que pode ser negligenciada sem prejuízo na precisão dos cálculos.

$$T(x, t) = 100 \left[ \frac{x}{10} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{10}\right) \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 kt}{100}\right) \right]$$

```

L=10;
k=0.835;
ntermossomatorio=100;
xini=0; Tini=0;
xfim=L; Tfim=100;
npontosX=10; //m
X=linspace(xini,xfim,npontosX+2);
//XX=linspace(xini,xfim,100*npontosX);
TSimulada=zeros(X);
TSimulada(1)=Tini;
TSimulada(npontosX+2)=Tfim;
deltax=X(2)-X(1);
deltat=0.001;
lambda=k*deltat./(deltax^2);
deltatmax=deltax^2./(6*k);

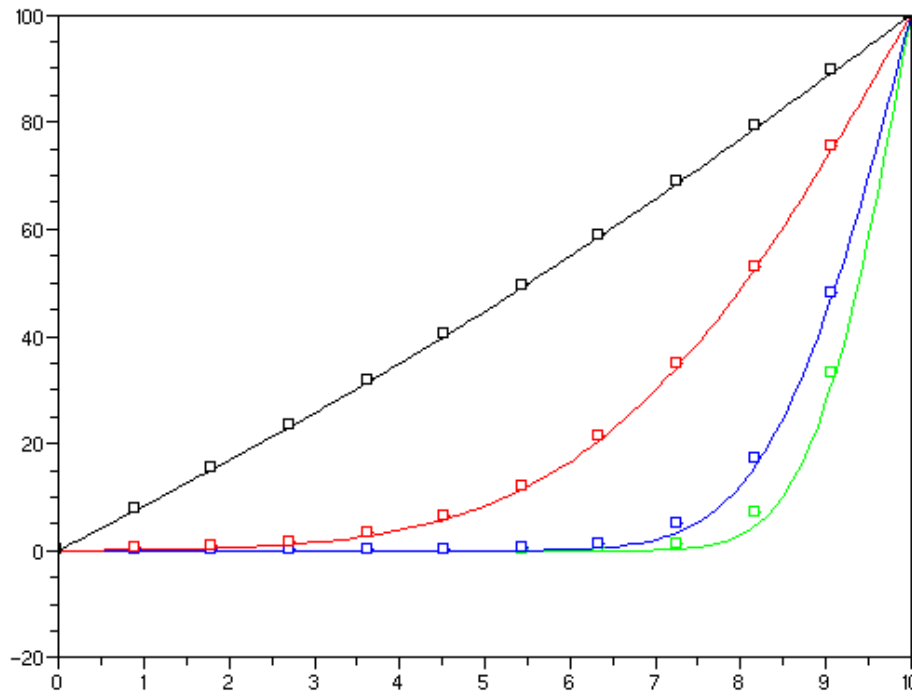
function [Temp_t]=EDP_Calor(t)
    Temp_t=(Tfim.*X)./(L*ones(X));
    for n=1:ntermossomatorio,
        Temp_t=Temp_t+(2*Tfim./%pi).*((-1)^n./n).*sin((n*%pi./L).*X).*exp((-k*t*(n*%pi./L)^2));
    end;
endfunction;

function [Tprox]=DFE_EDP_Calor(Tant)
    Tprox(1)=Tant(1);
    Tprox(length(X))=Tant(length(X));
    //borda esquerda
    Tprox(2)=Tant(1)+lambda*(Tant(2)-2*Tant(1)+Tini);
    //pontos interiores
    for i=2:(length(X)-2),
        Tprox(i)=Tant(i)+lambda*(Tant(i+1)-2*Tant(i)+Tant(i-1));
    end;
    //borda direita

```

```
Tprox(length(X)-1)=Tant(length(X)-1)+lambda*(Tfim-2*Tant(length(X)-1)+Tant(length(X)-2));  
endfunction;
```

Figura 12 - Scripts do uso da equação 11



$$T_i^{l+1} = T_i^l + \left( \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l) \quad (11)$$

Figura 13: Soluções da equação (11) para  $t=0.5$  segundos (curva verde),  $t=1.0$  segundo (curva azul),  $t=5$  segundos (curva vermelha) e  $t=30$  segundos (curva preta). Os pontos marcados são as soluções simuladas. Observe que há, sobretudo nos instantes iniciais, uma diferença entre o valor exato e simulado. A partir de  $t=30$  segundos, todas as curvas solução são praticamente idênticas a curva preta indicando que o sistema atingiu um estado estacionário. A diferença média para as curvas acima foi menor que 0.1% e a maior diferença encontrada (curva verde) foi de 0.8%.

### 1.3.9.1 DIFERENÇAS FINITAS NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE POLUENTES

Na seção anterior, discutimos o método das diferenças finitas na resolução da equação do calor – o exemplo padrão de equações parabólicas – em uma dimensão em um caso analítico. Voltando ao problema tema da dissertação, a citar, a equação modelo de difusão de poluente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(-\alpha \nabla C) + \text{div}(\vec{V}C) + \sigma C + F(\vec{x}, t) \text{ onde } C = C(\vec{x}, t) \text{ e } \vec{x} = (x, y, z).$$

Temos uma limitação ao método anterior que consiste em considerar que uma malha com grande quantidade de pontos em cada eixo coordenado (digamos 1000 pontos em cada eixo) implica em uma quantidade impraticável de pontos a calcular (para cada eixo coordenado com 100 pontos de malha, obtemos 1.000.000 de pontos a serem calculados para cada  $\Delta t$ ) de forma que algumas simplificações são necessárias para evitar tal demanda computacional.

Inicialmente, observe que, tanto no problema da dispersão de poluentes em rios quanto na dispersão em aquíferos, as dimensões planas (largura e comprimento) são muito maiores que a terceira dimensão (profundidade) de forma que podemos ignorar a dimensão de profundidade e considerar o escoamento como laminar ou bidimensional.

Claramente, tal simplificação não é totalmente realista mas – nos modelos simplificados que estamos estudando – ela não influi na precisão dos resultados obtidos, exceto, se considerássemos escoamentos turbulentos que, de qualquer forma, não são modelados pela equação acima.

Com esta simplificação, a equação acima é reescrita como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left( V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \sigma \right) + F(x, y, t) \quad (12)$$

Onde

- $C = C(x, y, t)$  é a concentração em um ponto de coordenadas  $(x, y)$  no tempo  $t$
- $V_x$  e  $V_y$  são, respectivamente, as componentes da velocidade de escoamento da água nas direções coordenadas  $x$  e  $y$
- $\alpha$  é a difusibilidade do poluente no meio líquido (positiva)
- $\sigma$  é o fator de decaimento (se negativo) ou de criação (se positivo) do poluente no meio.
- $F(x, y, t)$  mede o quanto o poluente é inserido (se positivo) ou removido (se negativo) do meio líquido ponto a ponto em função do tempo.

Vamos agora estudar como o modelo descrito pela equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left( V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \sigma \right) + F(x, y, t) \quad (12)$$

pode ser utilizado para descrever dois sistemas em estudo, a citar, o modelo de aquífero subterrâneo e o modelo de escoamento em rios.

## 1.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A HISTÓRIA DO USO DA ÁGUA NO BRASIL - do descobrimento ao século XX. Disponível em: <<http://historiadaagua.ana.gov.br/>>. Acesso em: 20 de abril de 2008.

AGÊNCIA NACIONAL DAS ÁGUAS. Hidroweb. Disponível em: <<http://www.ana.gov.br/mapainicial/pgMapaF.asp>>. Acesso em: 15 de abril de 2008.

ALCOFORADO, R. – **Simulação hidráulico-hidrológica de escoamentos em redes complexas de rios urbanos: Suporte de informações espaciais de alta resolução.** Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2006.

ALEGRIA, S.; DINIZ, G. - **Dispersão de poluentes em um trecho do rio Coxipó: Modelagem e aproximação numérica.** XXX CNMAC – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Florianópolis, SC, 2007.

BAGTZOGLU, AMVROSSIOS C.; ATMADA, J. Mathematical Methods for hidrologic inversion: the case of pollution source identification. **Haudb Eniron Cherm**, v. 5, part F, vol 3, p. 65-96, 2005.

BATES, P. D.; ROO, A. P. J. **A simple raster-based model for flood inundation simulation.** Journal of Hydrology, v. 236, p. 54 – 77, 2000.

BATSCHELET, E. **Matemática para Biocientistas**, Blüscher, 1989.

BENQUÉ, E. J. P.; HAUGUEL, A.; VIOLLET, P. L. In: **Engineering Application of Computational Hydraulics**, H. Pitman, 1982.

BORGES, V.A.K. **Modelagem de dados geográficos em discussão.** Belo Horizonte, PRODABEL, 1996.

BRASIL. **Atlas Nordeste – Abastecimento Urbano de Água.** ANA – Agência Nacional da Água. Ministério do Meio Ambiente. Brasília, 82 p. – DF, 2006.

BRAULIRO, G. L.; MÁRCIO, J. C.; GILBERTO, C. S. **Modelo matematico para representar a dinâmica de bacias hidrográficas e seus corpos d água.** XXXII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola. Goiana – GO, 2003.

CARVALHO, I. C. M. **Educação Ambiental: a formação do sujeito ecológico – 2ª.** ed. Cortez, São Paulo, 256p. 2006.

CHRISTOFOLETTI, **Modelagem de sistemas ambientais** 1 ed., Ed. Edgar Blucher, São Paulo, 1999.

CIRILO, C. L. B. **A Comunidade de Cabocó e a Percepção Ambiental das Crianças e Adolescentes para a Gestão do Rio Capibaribe**. Dissertação de Mestrado em Gestão em Políticas Ambientais – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2007.

CPRH – Companhia Pernambucana de Meio Ambiente: Diretoria de Recursos Hídricos e Florestais. **Relatório Técnico Sobre os Rios Capibaribe e Beberibe**. Recife, PE, 2006.

CPRH – Companhia Pernambucana de Meio Ambiente: Diretoria de Recursos Hídricos e Florestais. **Relatório Técnico Sobre os Rios Capibaribe e Beberibe**. Recife, PE, 2009.

CREUTIN, J. D.; MUSTE, M.; BRADLEY, A. A.; KIM, S. C.; KRUGER A. **River gauging using PIV techniques: a proof of concept experiment on the Iowa River**. Journal of Hydrology, v. 277, p. 182-194, 2003.

DALRYMPLE, R.; KNIO, O. **SPH Modelling of Water Waves**, Int. Conf. Coastal Dynamics Lund, 2001. p. 779-787.  
<[http://: www.google.com](http://www.google.com)>

GUSEV, Y. M; NASONOVA, O. N. **Na experience of modeling heat and water Exchange at thee land surface on a large river basin scale**, Journal of Hydrology, v. 233, p. 1 – 18, 2000.

HONGMING, H.; QIAN, Y.; JIE Z.; YONG, Q. T.; ROBERT, F. C. **Modelling complex flood flow evolution in the middle Yellow River basin, China**. Journal of Hydrology, v. 353, p. 76 -92, 2008.

KAMP, R. G.; SAVENIJ, H. H. G. Hydrological Model Coupling With ANNs. Hydrology & Earth System Sciences Res. V. 11, 1869 – 1881p, 2007.

MACHADO, M. B. **Modelagem Tridimensional da Dispersão de Poluentes em Rios**. Tese de Doutorado em Engenharia Química. Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). São Paulo, 2006.

MEYER, F. **Modelos Matemáticos de Impacto Ambiental - uma visão introdutória**. Notas de Minicurso. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP. Campinas, SP, 2001.

NETO, J. M. F. **Modelagem Matemática da Hidrodinâmica e da Qualidade de Água do Trecho a Jusante da Barragem do Rio Pirapama – PE, Brasil**. Dissertação de Mestrado em Ciências na Área de Oceanografia Abiótica (Física) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

NIHOUL, J. C. J. **Mathematical model of water quality and river management for the Meuse River basin**. Scientific Procedures Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems.n. 147,1983

PATHIRANA, A.; HERARTH, S. **Multifractal Modelling and Simulation of Rain Fields Exhibiting Spatial Heterogeneity** . Hydrology & Earth System Sciences Res. V. 6 , 695 – 708p, 2002.

REBOUÇAS, A. C.; BRAGA, B.; TUNDISI, J.G. **Águas Doces do Brasil: capital ecológico, uso e conservação**. Ed. Escrituras, 2006.



SAYÃO, L.F. **Theoretical models in information science abstraction and scientific method.** Ciência da informação, v.30, n.1, 100-1965p, 2001.

SILVA, S. T. **Políticas Públicas e Estratégias de Sustentabilidade Urbana. Revista de Direito Ambiental da Amazônia** - Hiléia, Manaus, v.1, n. 1, 121-147p. 2003.

STEWART, M. D.; BATES, P. D.; ANDERSON, M. G.; PRICE, D. A.; BURT, T. P. [Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches](#). Journal of Hydrology, v. 223, p. 85 - 106, 1999.

SUCUPIRA, P. A. P.; PINHEIRO, L. S.; ROSA, M.F. **Caracterização morfométrica do médio e baixo curso do Rio Acaraú-Ceará-Brasil.** VI Simpósio Nacional de Geomorfologia/ Regional Conference on Geomorphology. Goiânia - GO, 2006.

TÁPIA, B. T. **As Condições Ambientais da Microbacia Hidrográfica do Lajeado da Represa, Município de Marcelino Ramos/RS..** Santa Maria/RS, 105 p. 2006.

WAHIDUZZAMAN; KHAN, A. S.; MOHIUDDIN, F. A.; BASHAR, K. E. **Use of Mathematical Model as a Tool for Mitigation of flood: case study surma rive system in Bangladesh.** 2000.

WHITEHEAD, P. G.; WILLIAMS, R. J.; HORNBERGER, G. M. [On the identification of pollutant or tracer sources using dispersion theory](#). Journal of Hydrology, v. 84, 273-286p, 1986.

# **CAPÍTULO II**

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA DISPERSÃO DE  
POLUENTES:  
Análise temporal da dispersão de esgotos descartados em  
trechos urbanos do Rio Capibaribe**

**Ridelson Tavares de Melo**

Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP)

ridelson.tavares@bol.com.br

**Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima**

Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP)

emathematics@gmail.com

Rua do Príncipe, 526, Boa Vista, Recife, PE, Brasil, 50050-900

[www.unicap.br](http://www.unicap.br)

## 2.1 INTRODUÇÃO

Dentre os diversos usos da água, a irrigação é uma das atividades econômicas que apresentam as maiores demandas de água para a produção e, com o crescimento populacional, tende a se tornar cada vez maior. No mundo, a agricultura consome aproximadamente 69% de toda a água derivada dos rios, lagos e aquíferos subterrâneos (CARVALHO, 2006).

Os recursos naturais, no Brasil, têm uma importância decisiva no plano econômico. O país é dotado de uma vasta e densa rede hidrográfica, sendo que muitos de seus rios destacam-se pela extensão, largura e profundidade. Dentre os grandes rios em território nacional, destacam-se o Amazonas, o Paraguai, o São Francisco e o Paraná. Regionalmente, o Rio Capibaribe faz parte da bacia hidrográfica da região Metropolitana de Recife sendo um suporte a diversos ecossistemas atualmente ameaçados.

A ação humana, contudo, tende a promover alterações nos equilíbrios prévios de diversos biomas o que ocorre pela introdução de elementos exógenos (e.g, outros seres vivos ou componentes físico-químicos estranhos ao meio) e/ou pela diminuição da oferta e disponibilidade dos componentes necessários a eles. Chamamos de **poluição** a introdução de material estranho em tipo ou em quantidade em um dado sistema (ANA, 2008).

A poluição é tão mais grave quanto maior for o desequilíbrio que imponha ao sistema em estudo. Nesse sentido, um dos tipos mais graves de poluição em sistemas hidrológicos é a poluição – i.e, desequilíbrio – provocada pela introdução de quantidades excessivas de material orgânico, em especial esgoto doméstico não tratado, em um dado sistema hidrológico. aqui é determinar se uma dada quantidade de material introduzido em um sistema aberto, em particular rios cuja vazão varie conforme a sazonalidade e que sofram mudanças de profundidade devido a marés, será eliminada pela ação do tempo ou se ações concretas de remediação e recuperação têm de ser tomadas a fim de restaurar o equilíbrio prévio do sistema (CPRH, 2006; ALEGRIA, 2007).

O Rio Capibaribe tem uma grande importância no processo de urbanização do Recife, sendo uma das principais vias de transporte e principalmente fonte de abastecimento hídrico. Durante décadas, uma grande parcela da população utilizou trechos de suas margens alagadiças para habitação. Essa população, desprovida de atendimento de esgoto sanitário, atribui ao rio a função de meio de escoamento de dejetos domiciliares. O processo de urbanização verticalizada às margens do rio não

implicou melhorias das condições do sistema sanitário, pelo contrário, aumentou ainda mais a demanda sobre o sistema que se apresenta deficiente, tanto na abrangência quanto na manutenção. O resultado dessa problemática resulta em transbordamento de canais, refluxos de efluentes e principalmente em poluição das águas através de lançamentos de esgotos sem o prévio tratamento necessário (SILVA, 2003).

As atividades industriais são responsáveis pelo lançamento de resíduos sólidos e líquidos que geram impactos ambientais negativos na Bacia do Rio Capibaribe. Dentre estas atividades, destaca-se a indústria têxtil, agroindústria canavieira e de seus efluentes, vinhoto (CPRH, 2009).

A situação da poluição hídrica tem-se agravado no país, devido ao aumento das cargas poluidoras urbanas e industriais, uso inadequado do solo e de insumos agrícolas, erosão, desmatamento e mineração. Esses fatores levam a danos dos recursos hídricos, dentre os quais se destacam o aumento do transporte de sedimentos e a contaminação orgânica e química das águas.

Neste sentido, é notável que um país cuja população urbana tenha aumentado 137% em 26 anos, passando de 52 milhões de pessoas em 1970 para 123 milhões em 1996, tenha conseguido elevar, nesse período, o nível de abastecimento de água dos domicílios ligados à rede de 60% para 91% (ainda assim, mais de 11 milhões de pessoas que residem em cidades ainda não têm acesso à água através de rede). O problema remanescente referente ao abastecimento de água no setor urbano é a cobertura inferior das populações de baixa renda (35% dos quais não contam com água encanada, em comparação com 3% da população de rendas médias e altas). O abastecimento de água encanada só atinge 9% da população rural, muito embora poços e nascentes forneçam água à grande parte da população rural não servida (BRASIL, 2006).

Mesmo com esses números, é importante notar que a ausência de abastecimento de água potável e de coleta de esgotos sanitários são as principais causas das altas taxas de doenças intestinais e de outros tipos em países de baixa renda. Na falta de abastecimento de água potável, os domicílios frequentemente usam água que veiculam doenças, em sua maior parte de origem fecal. Na falta de coleta adequada de esgotos, o material fecal continua no domicílio ou na vizinhança e leva à transmissão de doenças. Estima-se que a falta de água potável e de saneamento nas áreas urbanas no Brasil causa cerca de 8.500 casos anuais de mortalidade prematura e de morbidade adicional.

Está claro que tal situação representa ônus para a qualidade de vida das populações não assistidas, já que é comprovada a estreita dependência entre saneamento e saúde pública. Segundo o Ministério da Saúde, 65% das internações

hospitalares resultam da inadequação dos serviços e ações de saneamento, sendo a diarreia responsável, anualmente, por 50 mil mortes de crianças, a maioria com menos de um ano de vida. Por falta de saneamento, a cólera encontra nas periferias urbanas e nos bolsões de pobreza as condições ideais para sua disseminação. Nas periferias das grandes cidades, nos pequenos aglomerados urbanos e nas regiões mais pobres que se concentram as populações desprovidas de saneamento básico.

Nesse sentido, os modelos de qualidade de água têm sido usados para monitoramento e, principalmente, controle de poluição de corpos d'água. Basicamente, os modelos de qualidade da água consistem em simular as concentrações de substâncias que podem estar dissolvidas, ou em suspensão, ao longo da coluna d'água. Para o cálculo das concentrações, são utilizadas as equações de balanço de massa, que podem ser aplicadas para vários contaminantes.

O principal uso do modelo de qualidade de água é simular parâmetros de qualidade em corpos d'água. Nesse sentido, a simulação dos parâmetros de qualidade de água em rios sujeitos ao lançamento de esgoto doméstico é relevante, no que se refere à utilização dessa água pelos seus usuários.

Existem vários modelos de qualidade de água, que vão dos mais simples aos complexos (CARVALHO, 2006).

Diversas formas de equalizar esse problema têm sido propostas por diferentes grupos. A mais comum consiste em manter uma série histórica da concentração de materiais com potencial poluente ao longo do tempo e atribuir desvios significativos dessa série histórica a eventos que necessitem de ações de fiscalização (encontrando os agentes poluidores) e posterior recuperação dos parâmetros normais segundo a série histórica mantida (BAGTZOGLU; AMVROSSIOS; ATMADA, 2005). Dessa forma, modelos matemáticos capazes de reproduzir o comportamento da série histórica em situações de normalidade de vazão podem contribuir para identificar se desvios provocados em situações atípicas (por exemplo, num regime de chuvas excessivas) correspondem ou não a situações de alerta ambiental o que contribui para redução das incertezas de diagnóstico de sistemas existentes e de concepção e dimensionamento de soluções de remediação de poluição (ALCOFORADO, 2006).

Dados da Companhia Pernambucana de Recursos Hídricos (CPRH, 2006) demonstram que as águas do Rio Capibaribe encontram-se severamente comprometidas por lançamentos de esgotos domésticos e industriais. Devido a essa poluição, o Conselho Nacional do Meio Ambiente (COMANA), enquadra-o na classificação 4, que está apenas no contexto restrito de navegação e paisagístico e usos menos exigentes.

O alto comprometimento do Rio Capibaribe resulta na necessidade de ações emergenciais para recuperação de suas águas (SILVA, 2003).

A determinação de um modelo matemático para simular a concentração dos poluentes em situações diversas que demonstre a verdadeira realidade do rio, é um passo importante, pois assim pode acionar as políticas efetivas de controle da concentração de poluentes críticos em níveis aceitáveis segundo a legislação vigente.

## 2.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação teve um período de execução 15 meses a partir da aprovação do Projeto e foi desenvolvida integralmente no Laboratório Inácio de Loyola do Departamento de Estatística e Informática da Universidade Católica de Pernambuco.

Dada a infra-estrutura computacional disponível naquele Laboratório, não foram necessários recursos materiais adicionais para sua execução.

Para alcançar os objetivos e metas da dissertação, o desenvolvimento do trabalho foi realizado nas seguintes etapas:

1. Pesquisa Bibliográfica – Realizada através do estado-da-arte em técnicas de simulação que são aplicadas ao problema de modelagem temporal da dispersão de poluentes em regimes de escoamento laminar e tridimensional aplicáveis a sistemas hídricos superficiais tais como rios, lagos e perfis represados;

2. Estudo das ferramentas matemáticas necessárias ao entendimento e elaboração dos modelos matemáticos específicos – Foram selecionadas as ferramentas matemáticas necessárias ao entendimento dos modelos descritos na literatura, escolhendo a que melhor se enquadra ao problema estudado;

3. Estudo dos softwares Scilab e outros de código livre que serão utilizados para implementação da modelagem – Esta etapa consistiu no estudo das funcionalidades e uso do software Scilab e dos pacotes disponíveis para simulação de sistemas dinâmicos posteriormente aplicáveis a este estudo. Esta fase gerou material bibliográfico que permite melhorar a curva de aprendizagem dos futuros estudantes e pesquisadores que venham a colaborar com o mesmo;

4. Levantamento de dados relativos ao regime de vazão, descarte de poluentes oriundos do sistema de saneamento da região metropolitana do Recife e disposição geográfica de um trecho do Rio Capibaribe – Essa fase constitui-se em levantamentos dos dados relativos ao zoneamento e distribuição dos regimes de vazão e descarte de esgoto urbano relativos à região metropolitana da cidade do Recife através dos relatórios técnicos com detalhamento disponível mediante consulta local. Dessa forma, o estudo da bibliografia relativa à modelagem de dispersão de poluentes em bacias



hidrográficas superficiais culminou em um modelo simplificado capaz de reproduzir a dispersão observada de poluentes introduzidos naquele meio;

5. Proposição do modelo matemático – Através do Scilab e da análise global mediante os algoritmos selecionados na pesquisa bibliográfica (seguindo o critério de melhor resultado na reprodução da evolução temporal da dispersão de poluentes), foi utilizado a simulação do comportamento espacial e temporal do fluxo de poluentes no Rio Capibaribe, reproduziu a série histórica relativa aos dados observados alcançados nessa etapa;

6. Delimitação do trecho do Rio Capibaribe – Após a identificação do modelo e da forma de introduzi-lo nas ferramentas computacionais anteriormente estudadas. Nessa fase, foram introduzidos os dados reais relativos ao rio estudado. Os dados introduzidos, foram identificados, segundo critérios de demanda de água para manutenção de ecossistemas e densidade populacional ribeirinha, no trecho no qual a modelagem foi aplicada;

7. Testes em dados simulados e ajuste dos módulos – Nessa etapa, foram ajustados os módulos implementados de forma que foram obtidos os melhores resultados possíveis em dados simulados. As etapas de simulação foram realizadas com o auxílio do Scilab os testes e a geração dos dados sintéticos com a suíte de ferramentas código-livre do Scilab;

No Capítulo I, é apresentada a revisão bibliográfica do estado-da-arte relativa a técnicas de simulação aplicadas ao problema de modelagem temporal da dispersão de poluentes em regimes de escoamento laminar e tridimensional aplicáveis a sistemas hídricos superficiais tais como rios, lagos e perfis represados. Uma breve descrição da ferramenta Scilab é incluída como parte desta revisão

No Capítulo II é feita uma caracterização da área de estudo contemplada nesta pesquisa bem como é formulado o problema da simulação, dado o regime de descarte de esgotos urbanos bem como sua disposição geográfica em um dado rio de perfil geográfico e regimes de vazão conhecidos, de como tal poluição é dispersada ao longo do tempo por esse regime de vazão levando em conta fatores sazonais e permitindo a elaboração de cenários diversos tais como medidas de contenção de descarte, medidas de diminuição de vazão e modificação do curso dos rios estudados.

Finalmente, no Capítulo II são apresentados os resultados oriundos da simulação de diversos cenários, suas conclusões e as considerações relativas a pesquisas futuras.

## 2.3 MODELO SIMPLIFICADO DE BRAÇO DE RIO

O rio será uma região retangular de comprimento  $X$  e largura  $Y$  dividida em uma malha de  $nx = \frac{X}{l}$  e  $ny = \frac{Y}{m}$  pontos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Diferentemente do caso anterior, porém, no braço de rio existe uma velocidade de escoamento suposta conhecida ao longo da direção  $x$  de forma que  $V_y = 0$  e  $\frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$  mas  $V_x \neq 0$ . Também de forma distinta do caso anterior, os pontos

de introdução de poluente são supostos **pertencentes** as fronteiras  $\{(x,0), 0 < x < X\}$  ou  $\{(x,Y), 0 < x < X\}$  o que indica que os poluentes somente são introduzidos no sistema através de suas margens. Em  $k_1 + k_2$  pontos de contaminação<sup>11</sup>

$I_1 = (px_1, 0), I_2 = (px_2, 0), \dots, I_{k_1} = (px_{k_1}, 0);$  os poluentes são introduzidos a  $S_1 = (px_{k_1+1}, Y), S_2 = (px_{k_1+2}, Y), \dots, S_{k_2} = (px_{k_1+k_2}, Y)$

**taxas variáveis durante todo o tempo de observação** simulando, por exemplo, a forma como uma indústria descarta resíduos em um rio, ou seja,  $\frac{\partial C}{\partial t}(px_i, t) = f_i(t)$

conhecida. Nas margens, fora dos pontos de contaminação, não há descarte ou introdução de material poluente de forma que nos demais pontos de fronteira das margens superior e inferior temos  $\frac{\partial C}{\partial t}(x, 0, t) = \frac{\partial C}{\partial t}(x, Y, t) = 0, 0 < x < X$ . O fluxo

d'água será suposto da fronteira a esquerda (coordenada  $x=0$ ) para a fronteira a direita (coordenada  $x=X$ ). Na fronteira a esquerda não há introdução ou descarte de poluente de forma que  $C(0, y, t) = 0$  portanto  $\frac{\partial C}{\partial t}(0, y, t) = 0 (0 \leq y \leq Y)$ . Na fronteira

direita, o poluente é suposto descartado a uma taxa proporcional a sua concentração, isto é,  $\frac{\partial C}{\partial t}(X, y, t) = -\beta C(X, y, t)$  com  $\beta > 0$  constante de proporcionalidade

<sup>11</sup> O símbolo  $S$  significa margem superior e o símbolo  $I$  margem inferior. Para fins de notação, nos referiremos aos pontos das margens indicando apenas a coordenada  $px_i$

conhecida o que termina com a descrição das condições de fronteira. Nos demais pontos, a concentração do poluente é suposta nula de forma que, nestes pontos,  $C(x, y, 0) = 0$ .

Simularemos duas situações com relação a velocidade de escoamento do rio:

- a) A velocidade é constante ao longo do tempo e igual em todos os pontos do rio, (sempre na direção de  $x$ ), ou seja,  $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$  de forma que  $V_x \neq 0$  mas  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$
- b) A velocidade é ainda igual em todos os pontos do rio de forma que, mais uma vez, temos  $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$ , contudo, não apenas  $V_x \neq 0$  mas também  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = v(t) \neq 0$  (conhecida). Um exemplo é a variação periódica da velocidade de um rio que deságua no oceano (como o caso dos rios Capibaribe e Beberibe) nas proximidades do escoadouro devido a ação das marés.

]

## 2.4 CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

O Rio Capibaribe nasce nas vertentes da Serra Jacarará, município de Porção, possui 240km de extensão. Em sua bacia, estão localizados 39 municípios e o ele deságua no Oceano Atlântico, depois de cortar toda a cidade do Recife. O Capibaribe é o rio mais importante do estado de Pernambuco, pois seu valor excede à necessidade de abastecimento. Esse rio é uma das marcas pictóricas do estado, sua existência tem valor histórico-valorativo, a história de Pernambuco está associada à existência desse rio. Nos últimos anos, ele é representativo de um projeto ecológico-turístico. Outra atividade marcante relacionada ao Capibaribe é a da sobrevivência das comunidades ribeirinhas que retiram dele a renda familiar visto que seus peixes e caranguejos garantem a vida de várias famílias. Percebe-se que a degradação do rio está pondo em desarmonia não apenas a existência hidrográfica como também a social.

Com uma área total de 7.400 km<sup>2</sup>, correspondendo a aproximadamente a 7,8% da área do estado. Seu curso está dividido em três trechos: superior, médio e inferior. O alto Capibaribe (a montante da cidade de Toritama, com área de drenagem igual a 2750 km<sup>2</sup>) e médio Capibaribe (entre Toritama e Limoeiro, com 5650 km<sup>2</sup>) encontram-se situados no Polígono da Seca, por isso apresenta um regime temporário. O baixo Capibaribe encontra-se entre Limoeiro e São Lourenço da Mata, com 1230 km<sup>2</sup>. Apresenta-se como um pequeno filete de água, que se apresenta seco na maior parte do ano, transformando o rio em um caminho de areia. Esse trecho possui uma grande quantidade de água no subsolo, tornando a área fértil e favorável ao aproveitamento das aluviões (deposito de cascalho, areia e argila que as enxurradas formam junto às margens ou à foz do rio).

A partir do município de Limoeiro, o rio se torna perene na região agreste do estado, até o seu desaguadouro, sendo navegável nos últimos 20 km em direção a sua foz no Recife. Ao longo de seu curso, o Capibaribe, atravessa vários centros urbanos, servindo de corpo receptor de resíduos industriais e domésticos. O Rio Tapacurá é o afluente mais importante do Capibaribe. Menos de 20% de sua área têm chuvas acima de 800 milímetros.

O crescimento acelerado das ocupações desordenadas nas áreas urbanas e de várzea, conjuntamente com o desmatamento das áreas de manguezais, vêm trazendo conseqüentemente o assoreamento da calha do rio e de seus afluentes, como o Riacho do Cavouco, que nasce e corta a Universidade de Pernambuco (UFPE), e o açude Apipucos (CIRILO, 2007).

A carga poluente decorrente das atividades industriais e do esgoto doméstico não tratado, associada à falta de planejamento de ocupação do solo e ao lixo, mata a biodiversidade nas águas e margens, trazendo para a população ribeirinha um largo espectro de doenças de veiculação hídrica.

O clima predominante em toda área de estudo é o clima tropical úmido que caracteriza uma precipitação média anual de 2450,7mm (média entre os anos de 1961 a 1990). Com cotas até 150 metros, na parte montanhosa e 10 metros, na região das planícies, que os morros que circundam as planícies aceleram o escoamento alagando a planície, assim se apresenta o relevo.

Segundo Cirilo (2007), a área região do Capibaribe tem regime térmico que recebe influência da maritimidade e do relevo, o que facilita o deslocamento das brisas, permitindo certa uniformidade da temperatura (em torno 24 °C e oscilação inferior aos 4° C). Nessa região, há predominância dos ventos alísios oriundos do sudeste.

A vazão, medida no posto localizado em São Lourenço da Mata, no período entre (serão utilizados os dados mais recentes referentes a vazão no momento da modelagem matemática), indicou uma média de 19, 84 m<sup>3</sup>/s (CPRH, 2009).

Os meandros do Rio Capibaribe, juntamente com os das bacias dos Rios Beberibe e Tejió, formam a planície de Recife. Essa planície flúvio-marinha com grandes regiões alagáveis e de solo que apresentam uma pequena resistência.

A região de estudo apresenta o clima tropical úmido com uma estação seca na primavera-verão e com outra estação chuvosa no outono-inverno (As'). Essas características são devidos a Frente Polar Atlântica (FPA), com atuação mais intensa entre junho e agosto e principalmente pelo fluxo permanente da massa de ar Tépidica Kalaariana (Tk), como resultado a pluviometria normalmente ultrapassa os 1.000 mm/ano, podendo chegar a atingir cerca de 2.300 mm/ano.

A classificação fluvial de acordo com Christofolletti (1999), com relação à geometria, no Baixo Capibaribe torna-se dendrítica, à medida que se aproxima da foz no Oceano Atlântico enquanto que no Alto Capibaribe a drenagem é parcialmente entrelaçada. O tipo dendrítico apresenta uma variação entre o tipo retilíneo (straight) e o meandranter (meandering).

O ecossistema urbano do Capibaribe, apresenta uma cobertura vegetal com uma importância para o equilíbrio ecológico da região. Essa cobertura é responsável pela retenção e estabilização do solo, com isso facilita a infiltração da água da chuva diminuindo o escoamento superficial. A vegetação à margem do rio dá refúgio a fauna, importante à sobrevivência da população ribeirinha. Outra função da vegetação é a

redução da poluição atmosférica e principalmente é responsável pela potencialidade e qualidade do abastecimento de água.

A calha do Rio Capibaribe tem uma largura variável, dentro da área de estudo no Bairro do Derby varia de 60 a 120 metros de largura, enquanto que na parte final atingi 200 metros.

O curso do rio na área estudada apresenta-se bastante alterada pela ação antrópica devido à urbanização. As alterações variam de aterramentos legais e clandestinos de áreas de várzeas, retificações e dragagens, construção de muros de contenção de enchentes. Com essas alterações, principalmente devido às retenções o rio perde energia para transportar material mais fino e diminui a vazão. Basicamente os sedimentos encontrados nas margens são silticos e argilosos com baixo teor de área (menos de 1%).

A partir do bairro dos Coelhos e da bacia de Santo Amaro a bacia apresenta uma grande quantidade de restos vegetais e de efluentes domésticos.

O manejo inadequado dos solos, juntamente com os baixos gradientes dos canais e do Capibaribe, é responsável pela potencialização dos extravasamentos da rede hídrica, função também do assoreamento das calhas pelos esgotos lançados somados ao lixo lançados no canal determinando a obstrução dos canais e estreitamentos do leito.

O seguimento industrial gera, em todo o mundo, milhões de toneladas de rejeitos na forma de efluentes líquidos a cada ano. A procedência desses despejos é decorrente de perdas inerentes ao processamento de insumos, da geração de rejeitos indesejáveis, de ações de manutenção, da fabricação de produtos fora de especificação e eventualmente até de incidentes industriais.

A disposição desses contaminantes provoca alterações diversas nos corpos receptores desses despejos, todas elas resultando em impactos ambientais significativos. Além disso, a presença de impurezas em fontes potenciais de fornecimento de água impõe custos adicionais de tratamento para que esse bem possa ser reaproveitado em quaisquer atividades (REBOUÇAS; BRAGA; TUNDISI, 2006).

A trajetória do ser humano na busca de minimizar os efeitos negativos provocados pela indústria de transformação compreende ações de diversas naturezas, nas quais, no entanto envolvem processos de controle e prevenção.

As ações de controle compõem-se de técnicas que visem minimizar os efeitos adversos dos despejos antes de sua disposição no ambiente aquático.

As ações de prevenção para o manejo de efluentes industriais apóiam-se na não geração ou ainda, no reaproveitamento dos rejeitos gerados pelas unidades de

qualquer processo de transformação. Nesse campo em particular, vêm-se destacando no meio industrial as práticas de reuso das correntes de despejos líquidos e de aproveitamento de efluentes domésticos (REBOUÇAS; BRAGA; TUNDISI, 2006).

De acordo com dados do CPRH, o Rio Capibaribe recebe vários tipos de efluentes industriais em seu leito a partir da cidade de Limoeiro. Entre os seus poluentes se destacam produtos químicos, minerais não-metálicos, materiais plásticos, matadouros, produtos alimentícios e de frigoríficos.

Na área estudada nesta dissertação são encontradas poluentes de origens de fontes industriais. Cromo e cianeto de origem de metalúrgica, provenientes da galvanaria e niquelagem desse tipo de indústria. Apesar de terem seus efluentes tratados, apresentam mesmo assim um grau de poluição alto.

O ácido nítrico também é um poluente que é produto de indústria na região estudada, mas que se encontra em níveis aceitáveis .

Resíduos contendo materiais orgânicos e sólidos em suspensão provenientes de frigoríficos também são despejados em seu leito, apresentando um grau médio de poluição, necessitando de um tratamento prévio. Graxas e iodo também são efluentes que são despejados em seu curso, originados de indústrias mecânicas.

O setor industrial é responsável por cerca de 22% do uso mundial de água, sendo que nos países desenvolvidos esse índice é de cerca de 59%, enquanto que nos países não desenvolvidos é de apenas 8%.

O setor é considerado o principal responsável pela crescente dificuldade na obtenção de água para atendimento das necessidades da sociedade. Esse fato deve-se não só ao crescimento contínuo da quantidade de água necessária para atender à demanda industrial, como principalmente à disposição, nos corpos d'água, dos efluentes aquosos industriais, os quais têm qualidade significativamente inferior à original.



Figura 14: Foto de satélite do Rio Capibaribe em Recife (Fonte Google)



Figura 15: Mapa da Bacia do Rio Capibaribe em Recife (Fonte Google)



## 2.5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para simular o modelo de braço de rio descrito na seção anterior, com intuito de obter os parâmetros **qualitativos** de comparação e calibração dos métodos numéricos implementados, consideramos um braço de rio de dimensão 300 metros de comprimento com largura (distância entre as margens) de 30 metros. A malha de simulação foi dividida em quadrados de área  $1\text{m}^2$  cada. Os pontos de introdução de dejetos foram posicionados a cada 10 metros a partir do ponto inicial em cada margem.

Chamamos a atenção que o interesse inicial desta pesquisa era simular o caso real relativo a um trecho do rio Capibaribe o que não foi possível devido ao fato de que, até a presente data, os dados disponibilizados pela CPRH não foram fornecidos. Em trabalhos futuros, já de posse dos dados reais coletados por aquela agência, tal calibração será feita de forma mais próxima da situação real.

Ressaltamos ainda que as técnicas implementadas neste trabalho, a citar, métodos de diferenças finitas, são inadequados para geometrias mais complexas ainda que, em geometrias simples – como as estudadas neste trabalho – forneçam uma excelente solução de compromisso entre simplicidade computacional e precisão numérica. Desta forma, em estudos limitantes das regiões de fronteira do rio por geometrias simples (por exemplo, escolhendo-se trechos retangulares de estudo) as técnicas estudadas neste trabalho tendem a ser bastante precisas mas computacionalmente inviáveis em geometrias mais complexas de forma que, em trabalhos futuros de continuidade desta dissertação em um trabalho de doutoramento – técnicas de elementos finitos e volumes finitos devem ser implementadas e comparadas com os resultados aqui obtidos.

As simulações realizadas tomaram por base diferentes situações de contaminação. Em cada situação, foi observado o comportamento espacial da “mancha” (pluma) de poluente ao longo do tempo. Também foi mantido registro da concentração ao longo do tempo do poluente em cada ponto de observação. Os resultados para cada situação são discutidos abaixo:

### 2.5.1 REGIME DE ESCOAMENTO NULO

Nesta simulação, a velocidade do rio foi suposta nula em ambas as componentes X (comprimento do rio) e Y (largura, ou distância entre as margens). Esta situação ocorre na prática quando a vazão do rio é pequena e oposta ao fluxo de maré sendo, no caso específico

do rio Capibaribe, predominante em situações de pouca precipitação. Os seguintes regimes de descarte foram simulados:

- Descarte em um ponto fixo no início do rio
- Descarte em um ponto fixo em ambas as margens do rio
- Descarte em dois pontos não antípodas em margens opostas do rio

Em todas as simulações, as manchas dispersaram-se por difusão simples. Dados de pontos de coleta indicam que a concentração atinge um máximo após um dado intervalo de tempo estabilizando em seguida. Em casos reais, tais comportamentos indicariam que uma fonte poluente intermitente acaba por contaminar todo o perfil do rio, entretanto, a concentração do poluente pode ser mantida, ponto-a-ponto, arbitrariamente baixa controlando a vazão do poluente inoculado.

## **2.5.2 REGIME DE ESCOAMENTO CONSTANTE**

Nesta simulação, a velocidade do rio foi suposta constante e na direção Cidade-Oceano (variação positiva da coordenada X) e independente da coordenada Y. Esta situação ocorre na prática quando há situação de vazante ou jusante das marés. Foram simuladas diversas situações de descarte, em particular, os resultados apresentados abaixo referem-se também as situações:

- Descarte em um ponto fixo no início do rio
- Descarte em um ponto fixo em ambas as margens do rio

Também nestes casos, observou-se que há uma parcela da dispersão que ocorre por difusão simples, mas também há outra parcela, significativa, devida ao movimento da massa líquida.

A principal diferença qualitativa com relação aos resultados anteriores, i.e., em regimes de escoamento nulo refere-se ao comportamento da concentração nos pontos de observação/coleta de dados. Nestes pontos, a concentração tende a diminuir após atingir o máximo antes de estabilizar. Na prática, isto implicaria que um regime de descarte intermitente de poluentes tende a exceder, ao menos por um certo período, os limites máximos de

concentração aceitáveis de poluição antes de estabilizar o que poderia implicar em um dano, ainda que os dados de coleta indicassem concentração baixa de poluente, devido a exposição do bioma a altas concentrações de poluição.

## 2.6 SIMULAÇÃO LABORATORIAL

Para a validação do Modelo Matemático proposto neste trabalho, foram realizados experimentos laboratoriais que comparam os valores reais com os obtidos através dos resultados computacionais.

Whitehead, Williams, Hornberger (1986) concluíram que os coeficientes de dispersão de poluentes de um rio obtidos experimentalmente são preferíveis aos valores obtidos utilizando a abordagem hidráulica ou canal geométrica. A variação da vazão do fluxo juntamente com o coeficiente de dispersão deve ser considerada. A faixa de erro deve ser avaliada para validar o modelo matemático.

O ajuste dos dados utilizados na modelagem matemática através de parâmetros de calibração não é necessário quando um grande número de unidades computacionais reduz drasticamente os erros aleatórios em parâmetros e eficaz sobre a simulação de tais características como integrante de uma grande bacia. Quando o número de unidades computacionais diminui, o erro relativo de simulações cresce. Isto aumenta os requisitos necessários para a precisão do parâmetro estimado (GUSEV; NASONOVA, 2000).

Gusev, Nasonova (2000) fizeram uma abordagem baseada em imagens para medições avaliadas em um experimento sobre o rio Iowa em Iowa City. Mais de vinte e um dias, dez medições foram feitas usando a abordagem baseada em imagem. Dez minutos de gravação em vídeo foram feitos da água do rio para cada medição. Particle image velocimetry (PIV) foi utilizada para estimar as velocidades da superfície para a área fotografada usando naturalmente espuma como um fluxo marcador. A velocidade de superfície estimada foi, então, ao longo do rio, calculado utilizando-se o padrão de velocidade com métodos mais de uma área selecionada de secção transversal. Vários aspectos exclusivos desse experimento foram a utilização de PIV para as condições de escoamento, e à avaliação das estimativas quitações relativamente a uma série de condições de escoamento.

A comparação do PIV com as medições tradicionais em metros, por exemplo, que foram feitas no local desde 1984, mostrou que o IPV foi consistente com os observados na fase de descarga efetuados. O experimento variou de 50 a 300 m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>, que abrange uma grande parte da classificação atual. Os resultados experimentais sugerem que a abordagem baseada em imagem pode ser uma maneira confiável de se estabelecer uma fase de descarga e, relação a talvez até mesmo à distância, fazendo medições repetidas com uma câmera montada no local. Ainda assim, existem limitações inerentes à forma de abordagem. Essas limitações incluem a necessidade

de reconhecer os padrões do fluxo de partículas ou marcador para detectar o movimento, os problemas associados às informações sobre a superfície da água, bem como o problema comum a determinação de todas as medições da necessidade das informações sobre o canal de secção transversal (CREUTIN, 2003).

Existe uma necessidade para a validação das previsões dos modelos de distribuição interna de fluxo, e sugere a necessidade de dados de campo juntamente com as interações dentro da planície do rio (STEWART, 1999). O fluxo de um rio é um dos processos mais importantes em termos de modelagem em sistemas de inundação da planície, embora existam sempre importantes dados de entradas laterais de drenagem e de encostas que circundam a planície e de interações entre o rio e a planície.

Bates; De Roo (2000) desenvolveram simulações de um modelo aplicado a um alcance de 35 km do rio Meuse na Holanda, utilizando apenas como fontes de informação os dados publicados e empregados para simular um evento de grande enchente que ocorreu em janeiro de 1995.

## 2.7 MATERIAIS UTILIZADOS

Para a realização das simulações laboratoriais da dispersão de poluentes em um rio foram utilizados os seguintes materiais:



Figura16 – calha em PVC TIGRE de 300cm x 15cm x 10 cm



Figura 17 - Calha com uma trena milimetrada



Figura 18 – Corante líquido base água Coral

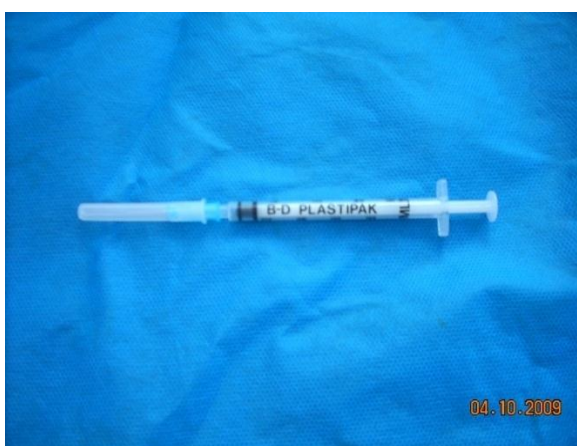


Figura 19 – Seringa Descartável de 5ml (Plastipak)

Nas simulações realizadas, foi utilizada a calha para simular o leito do rio, semelhante à anatomia existente no trecho estudado, respeitando a vazão e a velocidade das águas em uma escala proporcional à realidade.

A trena foi usada para mencionar, em centímetros, a expansão do corante à base de água, com o tempo em segundos, representando os poluentes estudados que se enquadram as características desejadas no estudo.

A turbulência foi eliminada na simulação através do comprimento da calha (3m), escolhido a região estudada onde não existia agitação. Para verificar o comportamento do corante foi escolhida a cor azul, contrastante com a água.



Figura 20 – Região com turbulência descartada

## 2.8 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

As simulações realizadas seguiram os parâmetros reais do rio Capibaribe como vazão e velocidade. O corante usado apresentou um comportamento semelhante ao poluente real selecionado no estudo, como: a maior parte sofresse difusão ao longo do tempo, não reagisse quimicamente com a água e uma pequena parte se depositasse no fundo da calha.

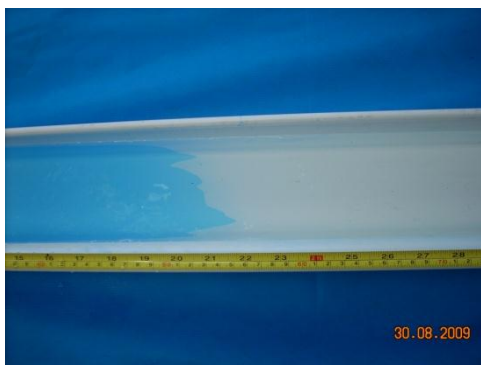


Figura 21 – A expansão de uma gota em relação ao tempo.

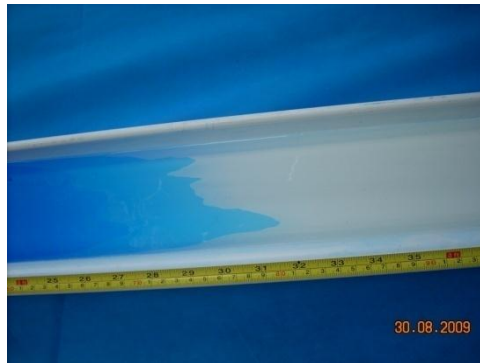
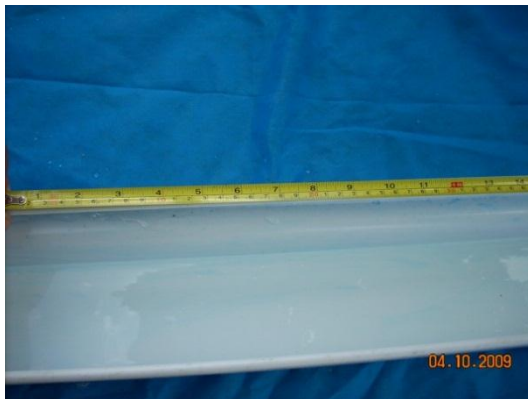


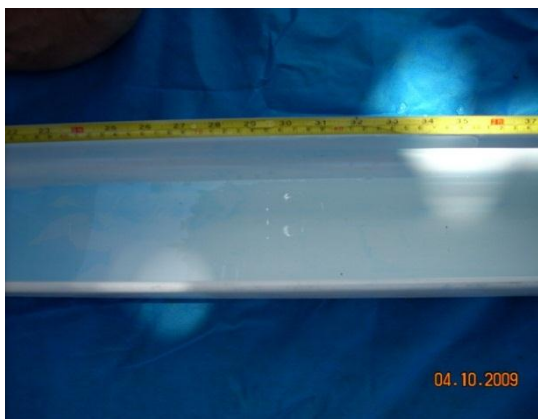
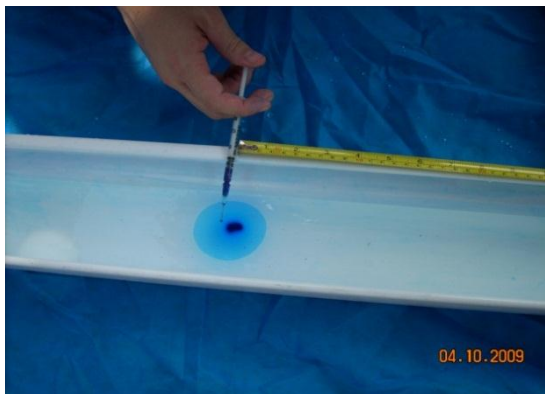
Figura 22 – Expansão da gota do corante após 5 segundos

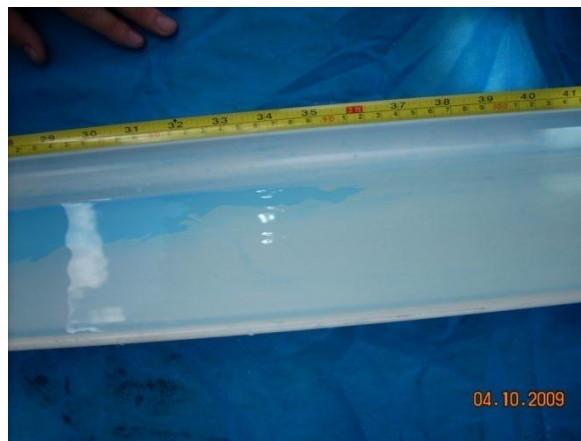
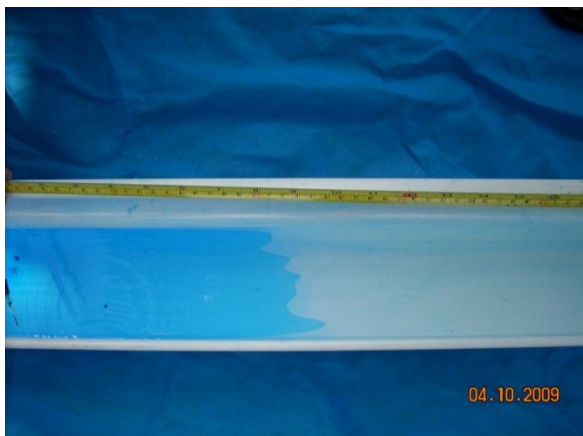
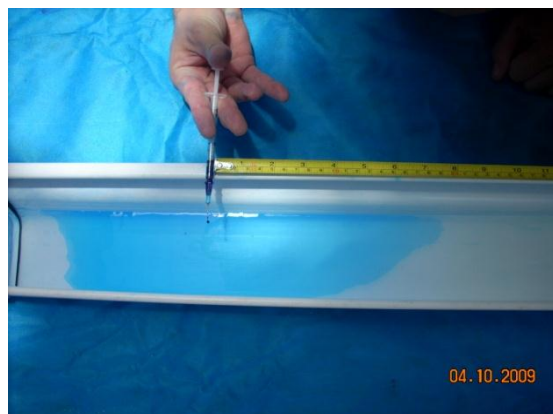
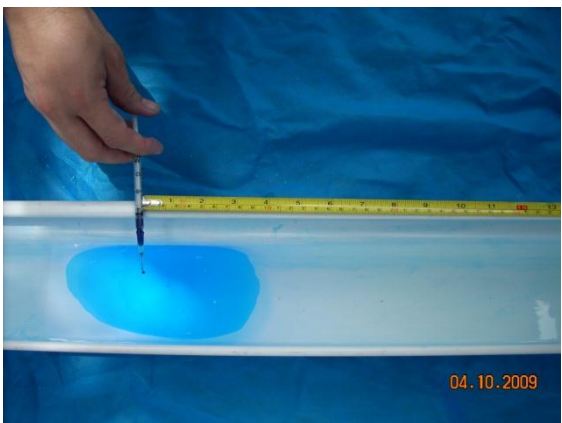
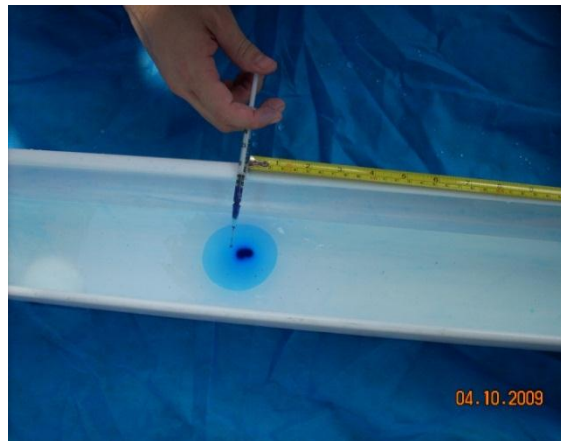
No primeiro momento em que se coloca a primeira gota do corante à base de água, ocorre um afastamento no centro do ponto de contato do corante com água, em seguida um preenchimento do espaço vazio deixado ao mesmo tempo tem início a expansão do corante ao longo do tempo.

A maior parte do corante é arrastada em direção à correnteza que sofre difusão ao longo do tempo, apenas uma pequena parte do corante se deposita no fundo da calha utilizada nesse estudo.





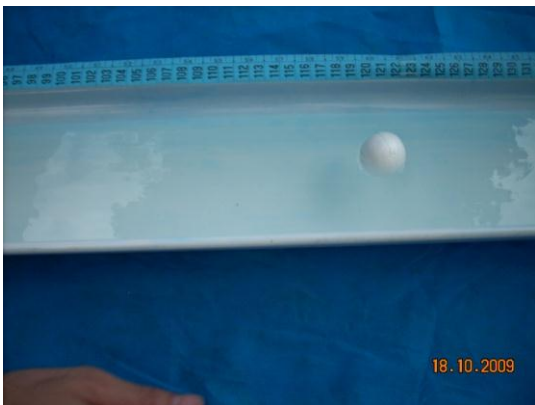
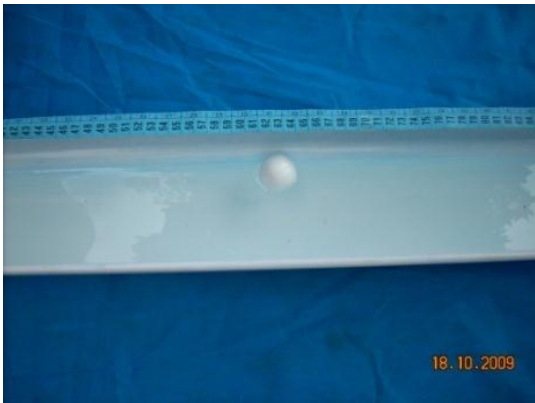




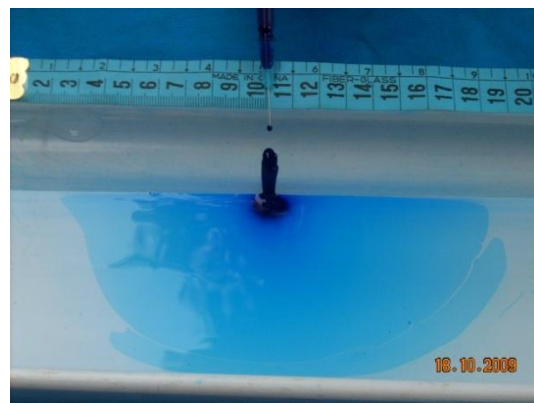


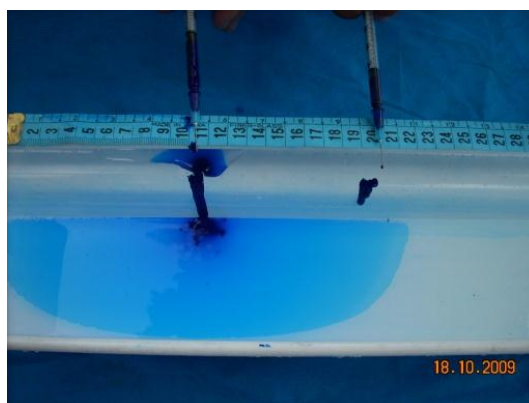
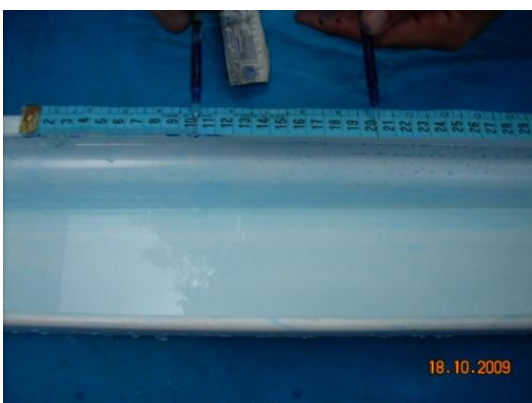
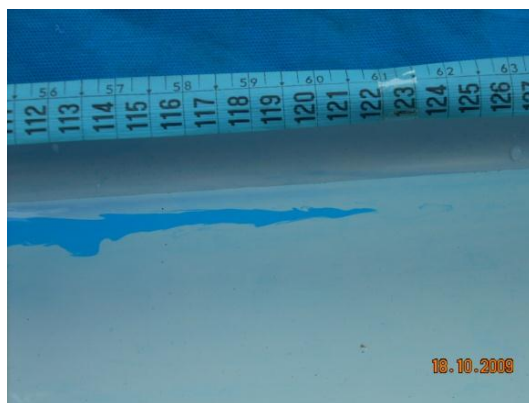
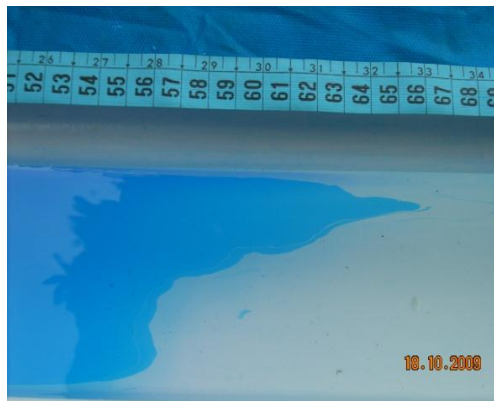
Simulações dia 18/10/2009

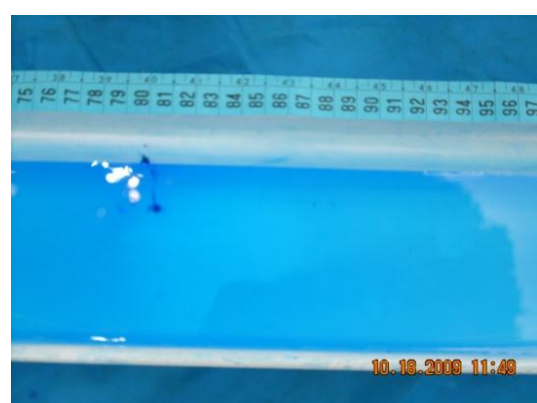
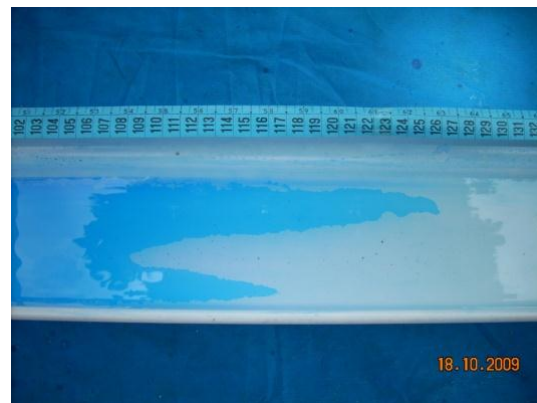
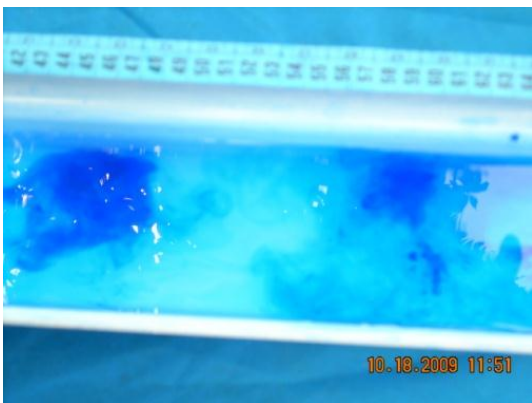
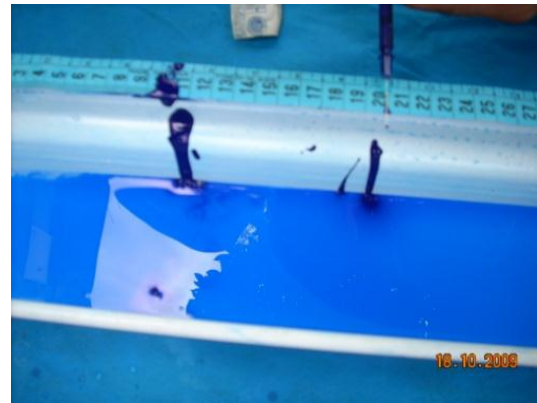


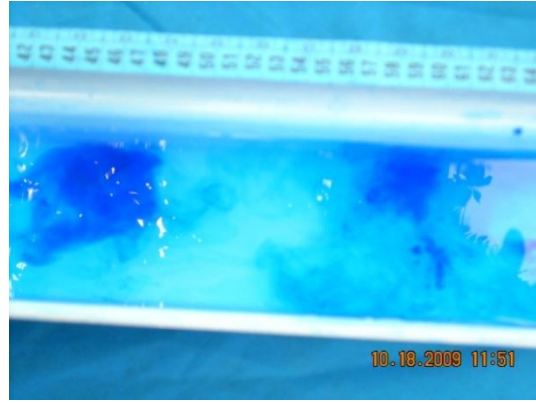


A velocidade encontrada foi de 4,47 cm/s, pois a bola de isopor percorreu 85 cm em 19s.









## 2.9 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

É inegavelmente crescente a percepção pública de que a prevenção é uma forma mais adequada de tratar a problemática ambiental que a simples remediação de eventos. Em particular, rios urbanos, dado seu papel sócio ambiental, tem recebido cada vez mais atenção neste aspecto.

No caso específico do Rio Capibaribe, há um número crescente de projetos concebidos exclusivamente para a proteção ou reparação de suas áreas adjacentes, sobretudo, no que se refere a áreas de proteção ambiental tais como mangues e estuários.

Neste contexto, o presente trabalho propõe uma modelagem matemática que pode ser facilmente simulada em um computador permitindo o estudo de convecção e dispersiva dos fenômenos de transporte em trechos de rios de geometria simples. No caso dos resultados obtidos relativos às simulações, nos levam a crer que em um rio a dispersão do poluente ocorre, aparentemente, como observamos nos testes realizados, guardada as devidas proporções relativas ao tamanho e quantidade dos poluentes, o que, também, não devemos desprezar as características dos poluentes, que irão determinar a velocidade com que estes chegarão a outros pontos de coleta do mesmo. Acreditamos que esta hipótese tem uma simplificação de menor influência, sobre a correspondente solução analítica aproximada do fluxo de campo. Esta solução também nos forneceu esquemas que permitam a identificação imediata das dimensões da característica da zona de captação, importantes no estudo do fluxo convectivo do poluente.

Alguns casos foram desenvolvidos que mostram o potencial do método no que diz respeito à possibilidade de acompanhar a evolução dos poluentes introduzidos. Toda a abordagem aqui descrita pode ser facilmente aplicável a diversas situações reais. Mesmo que a investigação neste artigo permanece na esfera homogênea de meios de comunicação social, acreditamos que o esquema matemático proposto pode ser de uso prático em numerosos casos práticos, evitando a necessidade de uma complexa e laboriosa formulação numérica.



## 2.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A HISTÓRIA DO USO DA ÁGUA NO BRASIL - do descobrimento ao século XX. Disponível em: <<http://historiadaagua.ana.gov.br/>>. Acesso em: 20 de abril de 2008.

AGÊNCIA NACIONAL DAS ÁGUAS. Hidroweb. Disponível em: <<http://www.ana.gov.br/mapainicial/pgMapaF.asp>>. Acesso em: 15 de abril de 2008.

ALCOFORADO, R. – **Simulação hidráulico-hidrológica de escoamentos em redes complexas de rios urbanos: Suporte de informações espaciais de alta resolução.** Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2006.

ALEGRIA, S.; DINIZ, G. - **Dispersão de poluentes em um trecho do rio Coxipó: Modelagem e aproximação numérica.** XXX CNMAC – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Florianópolis, SC, 2007.

BAGTZOGLU, AMVROSSIOS C.; ATMADA, J. Mathematical Methods for hidrologic inversion: the case of pollution source identification. **Haudb Eniron Cherm**, v. 5, part F, vol 3, p. 65-96, 2005.

BATES, P. D.; ROO, A. P. J. **A simple raster-based model for flood inundation simulation.** Journal of Hydrology, v. 236, p. 54 – 77, 2000.

BATSCHULET, E. **Matemática para Biocientistas**, Blüschler, 1989.

BENQUÉ, E. J. P.; HAUGUEL, A.; VIOLLET, P. L. In: **Engineering Application of Computational Hydraulics**, H. Pitman, 1982.

BORGES, V.A.K. **Modelagem de dados geográficos em discussão.** Belo Horizonte, PRODABEL, 1996.

BRASIL. **Atlas Nordeste – Abastecimento Urbano de Água.** ANA – Agência Nacional da Água. Ministério do Meio Ambiente. Brasília, 82 p. – DF, 2006.

BRAULIRO, G. L.; MÁRCIO, J. C.; GILBERTO, C. S. **Modelo matemático para representar a dinâmica de bacias hidrográficas e seus corpos d água.** XXXII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola. Goiana – GO, 2003.

CARVALHO, I. C. M. **Educação Ambiental: a formação do sujeito ecológico – 2ª.** ed. Cortez, São Paulo, 256p. 2006.

CHRISTOFOLETTI, **Modelagem de sistemas ambientais** 1 ed., Ed. Edgar Blucher, São Paulo, 1999.

CIRILO, C. L. B. **A Comunidade de Cabocó e a Percepção Ambiental das Crianças e Adolescentes para a Gestão do Rio Capibaribe.** Dissertação de Mestrado em Gestão em Políticas Ambientais – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2007.

CPRH – Companhia Pernambucana de Meio Ambiente: Diretoria de Recursos Hídricos e Florestais. **Relatório Técnico Sobre os Rios Capibaribe e Beberibe.** Recife, PE, 2006.

CPRH – Companhia Pernambucana de Meio Ambiente: Diretoria de Recursos Hídricos e Florestais. **Relatório Técnico Sobre os Rios Capibaribe e Beberibe**. Recife, PE, 2009.

CREUTIN, J. D.; MUSTE, M.; BRADLEY, A. A.; KIM, S. C.; KRUGER A. **River gauging using PIV techniques: a proof of concept experiment on the Iowa River**. Journal of Hydrology, v. 277, p. 182-194, 2003.

DALRYMPLE, R.; KNIO, O. **SPH Modelling of Water Waves**, Int. Conf. Coastal Dynamics Lund, 2001. p. 779-787.

<<http://www.google.com>>

GUSEV, Y. M.; NASONOVA, O. N. **Na experience of modeling heat and water Exchange at the land surface on a large river basin scale**, Journal of Hydrology, v. 233, p. 1 – 18, 2000.

HONGMING, H.; QIAN, Y.; JIE Z.; YONG, Q. T.; ROBERT, F. C. **Modelling complex flood flow evolution in the middle Yellow River basin, China**. Journal of Hydrology, v. 353, p. 76 -92, 2008.

KAMP, R. G.; SAVENIJ, H. H. G. Hydrological Model Coupling With ANNs. Hydrology & Earth System Sciences Res. V. 11, 1869 – 1881p, 2007.

MACHADO, M. B. **Modelagem Tridimensional da Dispersão de Poluentes em Rios**. Tese de Doutorado em Engenharia Química. Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). São Paulo, 2006.

MEYER, F. **Modelos Matemáticos de Impacto Ambiental - uma visão introdutória**. Notas de Minicurso. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP. Campinas, SP, 2001.

NETO, J. M. F. **Modelagem Matemática da Hidrodinâmica e da Qualidade de Água do Trecho a Jusante da Barragem do Rio Pirapama – PE, Brasil**. Dissertação de Mestrado em Ciências na Área de Oceanografia Abiótica (Física) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

NIHOUL, J. C. J. **Mathematical model of water quality and river management for the Meuse River basin**. Scientific Procedures Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems. n. 147, 1983

PATHIRANA, A.; HERARTH, S. **Multifractal Modelling and Simulation of Rain Fields Exhibiting Spatial Heterogeneity** . Hydrology & Earth System Sciences Res. V. 6 , 695 – 708p, 2002.

REBOUÇAS, A. C.; BRAGA, B.; TUNDISI, J.G. **Águas Doces do Brasil: capital ecológico, uso e conservação**. Ed. Escrituras, 2006.

SAYÃO, L.F. **Theoretical models in information science abstraction and scientific method**. Ciência da informação, v.30, n.1, 100-1965p, 2001.

SILVA, S. T. **Políticas Públicas e Estratégias de Sustentabilidade Urbana**. Revista de Direito Ambiental da Amazônia - Hiléia, Manaus, v.1, n. 1, 121-147p. 2003.

STEWART, M. D.; BATES, P. D.; ANDERSON, M. G.; PRICE, D. A.; BURT, T. P. [Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches](#). Journal of Hydrology, v. 223, p. 85 - 106, 1999.

SUCUPIRA, P. A. P.; PINHEIRO, L. S.; ROSA, M.F. **Caracterização morfométrica do médio e baixo curso do Rio Acaraú-Ceará-Brasil**. VI Simpósio Nacional de Geomorfologia/ Regional Conference on Geomorphology. Goiânia - GO, 2006.

TÁPIA, B. T. **As Condições Ambientais da Microbacia Hidrográfica do Lajeado da Represa, Município de Marcelino Ramos/RS..** Santa Maria/RS, 105 p. 2006.

WAHIDUZZAMAN; KHAN, A. S.; MOHIUDDIN, F. A.; BASHAR, K. E. **Use of Mathematical Model as a Tool for Mitigation of flood: case study surma rive system in Bangladesh**. 2000.

WHITEHEAD, P. G.; WILLIAMS, R. J.; HORNBERGER, G. M. **On the identification of pollutant or tracer sources using dispersion theory**. Journal of Hydrology, v. 84, 273-286p, 1986.