



UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA  
COORDENAÇÃO GERAL DE PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO EM DESENVOLVIMENTO DE PROCESSOS AMBIENTAIS

**Alex Sandro da Silva Bezerra**

**USO DE DIAGRAMAS DE VORONOI NA DETERMINAÇÃO DO  
ZONEAMENTO DE RISCO E MEDIDAS DE CONFIABILIDADES  
ASSOCIADAS À PRESENÇA DE POLUENTES ATMOSFÉRICOS**

**Recife,  
2011.**

**Alex Sandro da Silva Bezerra**

**USO DE DIAGRAMAS DE VORONOI NA DETERMINAÇÃO DO  
ZONEAMENTO DE RISCO E MEDIDAS DE CONFIABILIDADES  
ASSOCIADAS À PRESENÇA DE POLUENTES ATMOSFÉRICOS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Desenvolvimento de Processos Ambientais da Universidade Católica de Pernambuco como pré-requisito para obtenção do título de **Mestre em Desenvolvimento de Processos Ambientais**.

**Área de concentração:** Desenvolvimento de Processos Ambientais

**Linha de Pesquisa:** Informática, Modelagem e Controle de Processos

**Orientador:** Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima

**Co-orientador:** Prof. Dr. Sérgio Murilo Maciel Fernandes

**Recife,  
2011.**

B574u

**Bezerra, Alex Sandro da Silva**

**Uso de diagramas de Voronoi na determinação do zoneamento de risco e medidas de confiabilidades associadas à presença de poluentes atmosféricos / Alex Sandro da Silva Bezerra ; orientador Emerson Alexandre de Oliveira Lima ; co-orientador Sérgio Murilo Maciel Fernandes, 2011.**

71 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Católica de Pernambuco. Pró-reitoria Acadêmica. Curso de Mestrado em Desenvolvimento de Processos Ambientais, 2011.

1. Ar - Poluição. 2. Simulação (Computadores). 3. Diagrama de Voronoi. 4. Avaliação de riscos. 5. Qualidade ambiental. I. Título.

CDU 577.4

**Alex Sandro da Silva Bezerra**

**USO DE DIAGRAMAS DE VORONOI NA DETERMINAÇÃO DO  
ZONEAMENTO DE RISCO E MEDIDAS DE CONFIABILIDADES  
ASSOCIADAS À PRESENÇA DE POLUENTES ATMOSFÉRICOS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Desenvolvimento de Processos Ambientais da Universidade Católica de Pernambuco como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Desenvolvimento de Processos Ambientais.

**Defendida em: 30 / 11 / 2011.**

**Examinadores:**

---

Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima  
Universidade Católica de Pernambuco - UNICAP  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Francisco Madeiro Bernardino Júnior  
Universidade Católica de Pernambuco - UNICAP  
(Titular interno)

---

Prof. Dr. Carlos Costa Dantas  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE  
(Titular externo)

### Dedicatória

A Deus que sempre esteve presente  
norteando e abençoando minha vida.

A minha mãe Marluce Silva Bezerra, uma  
guerreira, que me gerou, criou e educou,  
com muita competência e amor.

"Os tolos dizem que aprendem com os seus próprios erros, eu prefiro aprender com os erros dos outros."

Otto Von Bismarck

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre à frente de minhas escolhas e ações, me dando forças para nunca desistir nas dificuldades.

À minha mãe, por estar sempre me apoiando.

À Universidade Católica de Pernambuco, pela oportunidade oferecida, me possibilitando subir mais este degrau.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima e Prof. Dr. Sérgio Murilo Maciel Fernandes, pela contribuição e dedicação para meu conhecimento.

Ao Prof. Dr. Carlos Costa Dantas, pela contribuição e incentivo na continuidade do trabalho.

Ao Prof. Aranildo Rodrigues de Lima, à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Kaoru Okada, à Prof<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Luiza Lopes Timóteo, por acreditarem em mim e em especial à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Wanilda Cavalcanti, pelo incentivo e confiança.

Ao colega de turma, de trabalho e amigo, Gustavo Raposo, pelo apoio e força durante todas as etapas do curso.

À colega de trabalho e amiga, Lêda Araújo, pela força e incentivo no momento mais difícil desse trabalho.

Aos meus colegas de turma no Mestrado, Marcelo, João, Carlos, Ladiel, Romualdo, Jaceline, Cláudia, Amanda, Graça e Mirthys, pelo convívio acadêmico.

A todos meus amigos e colegas de trabalho que de alguma forma me incentivaram para conclusão desse trabalho.

A todos que contribuíram de alguma forma para realização desse trabalho.

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>V</b>
<b>SUMÁRIO.....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>X</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>XI</b>
<b>CAPÍTULO I .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 OBJETIVOS .....</b>	<b>15</b>
1.2.1 OBJETIVO GERAL .....	15
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
<b>1.3 REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>16</b>
1.3.1 POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA .....	16
1.3.2 FONTES DE POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA .....	17
1.3.3 PRINCIPAIS POLUENTES ATMOSFÉRICOS .....	18
1.3.4 CLASSIFICAÇÃO DOS POLUENTES DO AR .....	21
1.3.5 PADRÕES DE QUALIDADE DO AR .....	21
1.3.6 EFEITOS DA POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA .....	24
1.3.7 CONTROLE DA POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA .....	28
1.3.8 DIAGRAMAS DE VORONOI.....	30
1.3.8.1 HISTÓRICO E DEFINIÇÃO GERAL .....	30
1.3.8.2 TIPOS DE DIAGRAMAS DE VORONOI.....	32
1.3.8.3 PROPRIEDADES DOS DIAGRAMAS DE VORONOI SIMPLES .....	46
1.3.8.4 APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VORONOI .....	48
1.3.9 TRIANGULAÇÕES DE DELAUNAY .....	50
1.3.9.1 DEFINIÇÃO DAS TRIANGULAÇÕES DE DELAUNAY .....	50
1.3.9.2 PROPRIEDADES DAS TRIANGULAÇÕES DE DELAUNAY .....	53
1.3.9.3 APLICAÇÕES DAS TRIANGULAÇÕES DE DELAUNAY.....	55

<b><u>1.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</u></b>	<b><u>57</u></b>
<b><u>CAPÍTULO II .....</u></b>	<b><u>61</u></b>
<b><u>USO DE DIAGRAMAS DE VORONOI VALORADOS NA DETERMINAÇÃO DO ZONEAMENTO DE RISCO ASSOCIADO À PRESENÇA DE POLUENTES ATMOSFÉRICOS.....</u></b>	<b><u>62</u></b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	62
2.2 DEFINIÇÕES .....	63
2.3 MATERIAIS E MÉTODOS.....	64
2.4 RESULTADOS.....	69
2.5 CONCLUSÃO .....	70
<b><u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</u></b>	<b><u>71</u></b>

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO I

Figura 1: Diagrama de Voronoi.....	30
Figura 2: Triângulo retângulo 3, 4 e 5.....	32
Figura 3: O fecho convexo de um conjunto de pontos.....	33
Figura 4: Um único ponto é dado.....	34
Figura 5: Um conjunto de pontos colineares.....	34
Figura 6: Um conjunto de oito pontos espalhados de forma circular.....	35
Figura 7: Um diagrama de Voronoi definido em termos de semi-planos.....	36
Figura 8: Um diagrama de Voronoi definido em termos de semi-planos.....	36
Figura 9: Ilustração do crescimento uniforme de cada semente.....	38
Figura 10: Diagrama de Voronoi Multiplicativo.....	39
Figura 11: Círculos baseados na mediatriz.....	40
Figura 12: Um diagrama de Voronoi valorado multiplicativo (DVVM) no $R^2$ .....	40
Figura 13: As mediatrizes para valores.....	42
Figura 14: Um diagrama de Voronoi valorado aditivo.....	43
Figura 15: Diagramas de Voronoi compostos em $R^2$ .....	44
Figura 16: Um diagrama de Voronoi exponencial.....	46
Figura 17: Diagrama de Voronoi e McDonald's.....	49
Figura 18: Duas triangulações.....	51
Figura 19: Grafo planar simples.....	51
Figura 20: Grafo planar (G) e seu grafo dual (G').....	52
Figura 21: Demonstração de dois tipos de triangulações.....	53
Figura 22: Triangulações de Delaunay.....	54

### CAPÍTULO II

Figura 23: Página de origem do código-fonte.....	64
Figura 24: Trecho do código-fonte original.....	65
Figura 25: Trecho do código-fonte com alterações realizadas pelo autor.....	65
Figura 26: Trecho do código-fonte com alterações realizadas pelo autor.....	66
Figura 27: Georeferenciamento manual da área a ser estudada.....	66
Figura 28: Inserção dos pontos resultantes do georeferenciamento manual.....	67
Figura 29: Inserção e utilização da função <i>drawPolygon</i> .....	67
Figura 30: Resultado da execução do <i>applet</i> com as alterações.....	67
Figura 31: Utilização do método <i>getImage</i> para leitura da imagem armazenada.....	68
Figura 32: Utilização da função <i>drawImage</i> para apresentação da imagem.....	68
Figura 33: Resultado da execução do <i>applet</i> com as novas alterações.....	68
Figura 34: Resultado da simulação do <i>applet</i> com os pesos de cada ponto.....	70

**LISTA DE TABELAS****CAPÍTULO I**

Tabela 1. Evolução anual da frota de veículos 2000 - 2011.	17
Tabela 2. Classificação dos poluentes do ar	19
Tabela 3. Padrões de qualidade do ar no Brasil	23

**CAPÍTULO II**

Tabela 4. Dados relevantes para realização da simulação	69
Tabela 5. Relação entre os dados relevantes os termos para realização da simulação	69

## RESUMO

A poluição atmosférica tornou-se uma das maiores preocupações mundiais para a saúde pública e ambiental. Vários estudos já abordaram o contexto desse tema, no intuito de verificar a associação entre o aumento da incidência de doenças com o aumento da poluição atmosférica, principalmente em cidades onde o tráfego de veículos tem aumentado de forma significativa. O controle dessa poluição, normalmente, é realizado através da monitoração da qualidade do ar, por meio de rede de sensores. Esta rede de monitoramento, além de ser utilizada como instrumento de medida de segurança de saúde pública, permite analisar os benefícios propiciados pelas ações de controle dos níveis de poluição do ar e justifica possíveis intervenções em caso de violação dos limiares estabelecidos pela legislação. Os altos custos envolvidos e a dificuldade inerente à logística de implantação e manutenção dos pontos de coleta podem levar a um posicionamento inadequado ou pouco representativo, quando não estudado cuidadosamente. Portanto, uma boa escolha do local de inserção do ponto é indispensável para propiciar uma maior eficiência nesses custos. Os Diagramas de Voronoi Valorados foram utilizados como uma ferramenta para determinar a área de abrangência de cada sensor de poluição atmosférica. Após a realização das simulações, as áreas de abrangência de cada sensor relacionada com seu peso, foram apresentadas de maneira satisfatória.

**Palavras-Chave:** Poluentes Atmosféricos; Análise de Risco; Diagramas de Voronoi Valorados.

## ABSTRACT

Atmospheric pollutants has become a major world concern for environmental and public health. Several studies have already addressed in this context about theme in order to verify the association between increased incidences of diseases with increased air pollution, mainly in cities where vehicle traffic has increased significantly. The pollution control is usually done by monitoring air quality through the sensor network. This monitoring network, besides being used as a tool for measuring public health safety, allow analyze the benefits gained by efforts to control the levels of air pollution and justify possible actions in case of breach of the thresholds established by legislation. The high costs involved and the difficulty inherent in the logistics of deployment and maintenance of the collection points can lead to an inappropriate placement or unrepresentative, if not carefully studied. Therefore, a good choice of site of insertion point is essential to provide greater efficiency in these costs. In this sense, the use of the weighted diagram Vononoi was used as a tool to determine the coverage area of each pollutant atmospheric sensor. After being realized the simulations, the coverage area of each sensor related with their own weight, were presented in a satisfactory way.

**Key Words:** Atmospheric pollutants; risk analyses; weighted Voronoi diagrams.

# Capítulo I

## 1.1 INTRODUÇÃO

Antigamente acreditava-se que a água potável e os alimentos poderiam faltar, mas julgava-se que o ar necessário para respiração dos seres vivos nunca deixaria de estar disponível. Em parte, esta concepção estava correta, pois sempre existirá na atmosfera, em qualquer ponto, o ar. Contudo, esse ar ou mistura de gases pode não ser adequada à manutenção da vida dos seres vivos em condições ideais (BRANCO, 1995).

O aquecimento global pode ser considerado um dos grandes problemas da atualidade, movimentando diversas nações em busca de uma solução que possa reduzir a emissão, na atmosfera, de poluentes como o ozônio, dióxido de carbono, metano, óxido nitroso, e o monóxido de carbono e conseqüentemente seus efeitos (VERDADE; DIXO; CURCIO, 2010).

A contaminação do ar nos grandes centros urbanos tem sido um grave problema no último século, merecendo, portanto, a atenção da comunidade científica e também da população, como uma fonte de possíveis agravos à saúde. Os efeitos da poluição do ar sobre a morbidade e também sobre a mortalidade têm sido observados nas mais diversas regiões do mundo. A faixa etária mais vulnerável é a das crianças e dos idosos, mesmo quando os níveis médios dos poluentes não são tão altos (BAKONYI, 2003).

O alto comprometimento da qualidade do ar que é respirado é decorrente do intenso crescimento populacional das cidades (DANNI-OLIVEIRA, 2000). Esse desenvolvimento urbano e industrial tem contribuído de forma significativa com o aumento crescente da emissão de poluentes atmosféricos os quais se concentram no ar e são responsáveis por inúmeras conseqüências como: danos à saúde humana, desequilíbrio e degradação dos ecossistemas (COSTA, 2009).

Segundo Licco (2008), toda atividade socioeconômica pode ser considerada uma fonte de poluição, diferenciando apenas se em maior ou menor grau. Os processos de produção, dessa atividade, possuem naturalmente algum grau de ineficiência, de forma que os resíduos produzidos em tais processos, normalmente, são liberados no ar, águas ou solo. Levando a um aumento da degradação da qualidade ambiental e, conseqüentemente, à poluição.

Inúmeros óbitos ocorreram na Europa e os Estados Unidos em decorrência da excessiva poluição atmosférica. Tais acontecimentos fizeram com que a comunidade científica mundial direcionasse o olhar para essa questão. Assim, começaram a questionar sobre os efeitos adversos à saúde humana e a buscar soluções para esse problema (COLOMBINI, 2008).

Nos anos 70, os problemas eram causados por poluentes primários como: dióxido de enxofre ( $\text{SO}_2$ ) e óxidos de azoto ( $\text{NO}_x$ ), mas nos tempos atuais, os poluentes secundários foto-oxidantes como o ozono também têm causado muitos problemas como o conhecido *smog*, característico das grandes cidades de forte insolação. Esse problema tende a crescer devido ao aumento do tráfego, propiciando o agravamento das emissões de  $\text{CO}_2$  (ALMEIDA, 2010).

Diante do exposto, há atualmente uma atenção maior às formas de monitoramento da qualidade do ar nos grandes centros urbanos.

Nesta dissertação estudou-se a aplicação da técnica de Diagramas de Voronoi em função de uma métrica para permitir o planejamento de uma rede de sensores, tendo por base a população de uma região efetivamente atendida por cada sensor da rede. Para isso foi necessário criar de um *software* que exibe a área que será monitorada sob a responsabilidade de cada sensor na região. Daí pôde-se determinar a região para as simulações de poluição e obtenção de dados que servirão de base para a avaliação de risco à saúde em cada área.

O ponto determinante para o início desse trabalho foi a relação existente entre os poluentes atmosféricos e problemas relacionados à saúde humana, e a percepção do grande aumento da frota de veículos, que são fontes causadoras da poluição atmosférica.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Determinar a área de abrangência de cada ponto selecionado de coleta de dados relativos ao monitoramento da poluição atmosférica na região conhecida como “Polo Médico” da Ilha do Leite em Recife, determinando, para cada área, uma medida de risco ambiental baseada na população e presença de agentes econômicos sociais nesta área determinada.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Determinar qual(is) o(s) ponto(s) de colocação dos sensores;
- Determinar qual a área que será monitorada por cada sensor com base na importância social e econômica do local de inserção dos pontos;
- Determinar uma métrica para determinação dos pesos relativos aos pontos que darão origem aos Diagramas de Voronoi Valorados;
- Implementar um *software* que possa ser utilizado como ferramenta de gestão pública utilizando os Diagramas de Voronoi Valorados.

## 1.3 REVISÃO DA LITERATURA

### 1.3.1 Poluição Atmosférica

A poluição pode ser definida como a existência de substâncias estranhas à composição do meio, ou em quantidade suficientemente elevada. Se for considerado o ar como meio, podemos dizer que a mudança em sua composição ou em suas propriedades pode ter como causa a emissão de poluentes, capaz de torná-lo impróprio, nocivo ou inconveniente a saúde e ao bem estar dos seres vivos (BRANCO, 1995).

Assim, a poluição do ar pode ser considerada como sendo a presença de contaminantes que podem causar desconforto ou risco à saúde humana e danos em animais, em vegetais ou em materiais (COSTA, 2009).

O poluente atmosférico é qualquer forma de matéria ou energia com intensidade e em quantidade, concentração, tempo ou características em desacordo com os níveis estabelecidos, pelos agentes de saúde pública, e que tornem ou possam tornar o ar impróprio, nocivo ou ofensivo à saúde, inconveniente ao bem estar público, danoso aos materiais, à fauna e flora, ou prejudicial à segurança, ao uso e gozo da propriedade e às atividades normais da comunidade (CONAMA, 1990).

Finalmente, poluentes também podem ser definidos como substâncias químicas perigosas ou não perigosas, dependendo da concentração presente na atmosfera e de suas características físicas, químicas e toxicológicas. Quando são considerados perigosos, podem ser subclassificados em tóxicos, corrosivos, inflamáveis, explosivos, ou infectantes e os não perigosos segundo seu grau de influência. Quando considerados tóxicos, são compostos que apresentam um potencial de causar sérios danos à saúde humana ou ambiental, caso estejam presentes em concentração e/ou por período de tempo suficiente para tal (UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, 2007a *apud* LICCO, 2008).

### 1.3.2 Fontes de Poluição Atmosférica

A maioria das atividades realizadas diariamente produz algum tipo de poluição. Um simples churrasco do domingo, dirigir um automóvel, pintar uma casa, fumar, queimar um pouco de lixo, ou simplesmente despejar o esgoto doméstico nos rios pode estar contribuindo de alguma forma para a contaminação da atmosfera. Essa contribuição individual de poluente, aparentemente, é pouco impactante comparando com uma indústria. Porém, quando se leva em consideração uma cidade, onde se pode multiplicar essa pequena contribuição por milhares, milhões ou até mesmo bilhões de vezes, entende-se o impacto real causado por esse conjunto (BRANCO, 1995).

Considerando que na Região Metropolitana do Recife – RMR, a frota de veículos tem aumentado de maneira acelerada (Tab.1 e Graf. 1), proporcionalmente ocorre o aumento da emissão dos poluentes nesta região, ficando essa fonte de poluição cada vez mais significativa no cômputo geral.

**Tabela 1.** Evolução anual da frota de veículos 2000 - 2011.

<b>Anos</b>	<b>RMR**</b>	<b>RECIFE</b>
2000	527.107	335.256
2001	558.009	350.731
2002	585.786	364.665
2003	606.474	374.054
2004	629.670	384.651
2005	656.200	397.718
2006	677.584	403.676
2007	723.862	425.185
2008	779.450	452.134
2009	846.535	485.015
2010	934.881	527.840
2011*	1.013.817	565.225

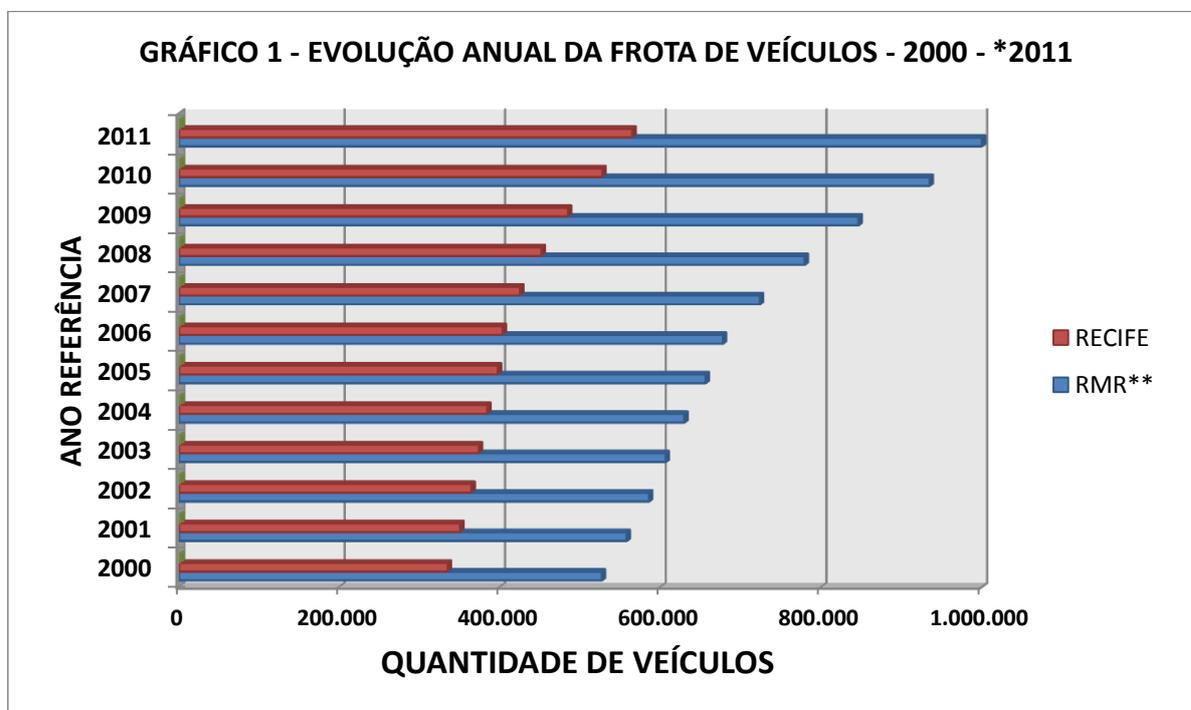
**Fonte:** DETRAN/PE

\* Dados até outubro

\*\*Incluindo Recife

Segundo Torres (2005), os fenômenos meteorológicos não podem deixar de ser considerados de extrema importância, uma vez que exercem um papel fundamental em relação à poluição do ar. As condições meteorológicas possibilitam

estabelecer uma forma de ligação entre a fonte poluidora e o receptor através do transporte e a dispersão dos poluentes.



Fonte: DETRAN/PE

\* Dados até outubro

\*\*Incluindo Recife

### 1.3.3 Principais Poluentes Atmosféricos

Segundo o Chemical Abstracts Service (2008) a contagem atual de substâncias químicas orgânicas e inorgânicas conhecidas está em torno de 33,9 milhões, sendo 19,2 milhões delas comercialmente disponíveis, 246.329 das quais estão inventariadas e/ou regulamentadas (McHUGH et al, 1997). Considerando que no manuseio e transformação das substâncias químicas uma pequena parcela se perde na atmosfera, fica caracterizada a preocupação dos gestores ambientais com referência aos riscos à saúde pública ocasionada pelos poluentes atmosféricos (LICCO, 2008).

Licco (2008) reforça que a intensidade com que um poluente tóxico no ar afeta a saúde de uma pessoa depende de vários fatores: o estado de saúde, susceptibilidade, quantidade do poluente à qual se expõe a duração da exposição e frequência da exposição como também o grau de toxicidade da substância.

Os poluentes atmosféricos tóxicos que causam maior preocupação são, portanto, aqueles emitidos em quantidades suficientemente grandes para se fazerem presentes na atmosfera em concentrações reconhecidamente tóxicas, e que atingem grandes populações (FAVERO et al, 2007).

Segundo Branco (1995), quando o objetivo é analisar o efeito dos poluentes sobre as pessoas ou ambientes naturais, há a necessidade de classificá-los de acordo com a sua composição química (Tab. 2). Assim, os principais compostos químicos existentes no ar das cidades comprometidas pela poluição causada pela atividade industrial e veículos automotores são os sulfurosos, os nitrogenados, os orgânicos, os óxidos de carbono, os oxidantes fotoquímicos e o material particulado.

**Tabela 2.** Classificação dos poluentes do ar

<b>Classificação</b>	<b>Poluentes</b>	<b>Descrição</b>
<b>Emissão no ar atmosférico</b>	<b>Primários</b>	Poluentes emitidos diretamente na atmosférica, por exemplo: dióxido de enxofre (SO <sub>2</sub> ), algumas espécies de óxido de nitrogênio (NO <sub>x</sub> ), monóxido de carbono (CO) e material particulado (MP).
	<b>Secundários</b>	Poluentes que se formam no ar como resultado das reações químicas com outros poluentes e gases, por exemplo: ozônio (O <sub>3</sub>
<b>Origem (ambiente interno e externo)</b>	<b>Internos</b>	<b>Fontes:</b> combustão de madeira, na atividade culinária; ressuspensão de partículas; materiais de construção; ar condicionado; fumaça de tabaco; aquecimento e agentes biológicos. <b>Produtos:</b> CO, dióxido de carbono (CO <sub>2</sub> ), aldeídos, álcool, cetonas, álcalis, agentes microbianos e poeiras orgânicas.
	<b>Externos</b>	<b>Fontes:</b> industrial, comercial, urbana, regional, natural, agrícola <b>Produtos:</b> SO <sub>2</sub> , NO <sub>x</sub> , MP, benzeno.
<b>Tipo</b>	<b>Gasoso</b>	SO <sub>2</sub> , NO <sub>x</sub> , CO, benzeno, aldeídos, 1,3-butadieno
	<b>Particulado</b>	Particulado Total em Suspensão (PTS), material particulado grosso (MP <sub>10</sub> ), fino (MP <sub>2,5</sub> ) e partículas ultrafinas (MP <sub>0,1</sub> )

Fonte: COLOMBINI, 2008

### 1.3.3.1 Compostos Sulfurosos

Podem ser originados pela queima de combustíveis fósseis, formando o dióxido de enxofre ( $\text{SO}_2$ ). Esse dióxido transforma-se em trióxido de enxofre ( $\text{SO}_3$ ) quando ativado pela radiação solar, que por sua vez em ambientes de alta umidade se unem à água ( $\text{H}_2\text{O}$ ) formando o ácido sulfúrico ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ), que é altamente corrosivo e tóxico. Outra maneira de se formar o dióxido de enxofre é através oxidação causada pela combinação do ozônio com do gás sulfídrico ( $\text{H}_2\text{S}$ ), que normalmente tem origem na atividade biológica de decomposição de matéria orgânica por processo anaeróbio. Esse processo ocorre geralmente em rios altamente poluídos por esgotos domésticos, onde existe a liberação desse gás na atmosfera (BRANCO, 1995).

### 1.3.3.2 Compostos Nitrogenados

O monóxido de nitrogênio ( $\text{NO}$ ) é formado pelas reações de combustão em alta temperatura, como a realizada em motores de combustão interna. O monóxido de nitrogênio oxida-se a dióxido de nitrogênio ( $\text{NO}_2$ ) quando em exposição à intensa radiação solar (BRANCO, 1995).

### 1.3.3.3 Compostos Orgânicos

Genericamente os hidrocarbonetos, aldeídos e outros elementos que possuem o carbono como base de suas moléculas. A queima parcial de combustíveis fósseis é responsável por uma parcela desses compostos, a evaporação de combustíveis e solventes fica com outra parcela e a terceira fica a cargo da decomposição de resíduos orgânicos acumulados em depósitos de lixo (lixões) ou rios com grande carga de esgotos, onde há a formação de metano ( $\text{CH}_4$ ) (BRANCO, 1995).

### 1.3.3.4 Óxidos de Carbono

Toda combustão no final produz gás carbônico ( $\text{CO}_2$ ) que não é tóxico, mas auxilia no efeito estufa. Porém, quando o oxigênio necessário para que se tenha uma combustão completa não for suficiente, o resultado dessa combustão incompleta será o monóxido de carbono ( $\text{CO}$ ), que é um dos gases mais tóxicos e

mais perigosos para o ser humano, é um dos poluentes mais encontrados no ar das grandes cidades e tem como fonte principal de emissão, os motores dos automóveis em atividade (BRANCO, 1995).

#### 1.3.3.5 Material Particulado

Pode ser definido como toda emissão atmosférica não gasosa. O material particulado pode ser originado de várias maneiras: suspensão de poeira pela ação do vento ou tráfego de veículos, queima de combustíveis como óleo e carvão, indústrias de cimento ou fertilizantes e queimadas em geral (BRANCO, 1995).

As partículas totais em suspensão (PTS), entre os poluentes atmosféricos mais comuns, provenientes principalmente de emissões antropogênicas, tais como queima de resíduos, fuligem, indústrias e combustão de veículos automotores, onde podem ser encontrados traços de alguns metais como o Cu, Fe, Mn, Zn, Cd, Pb, Cr e Hg (BRAIT, 2010).

#### 1.3.4 Classificação dos Poluentes do Ar

Com o avanço da tecnologia propiciando o reconhecimento da poluição atmosférica urbana e não urbana como uma mistura complexa de componentes com diversas características físicas e químicas, que veio favorecer a classificação desses componentes de acordo com sua composição química, tamanho das partículas, fonte emissora e modo de liberação nos ambientes internos e externos (COLOMBINI, 2008).

#### 1.3.5 Padrões de Qualidade do Ar

São as concentrações de poluentes atmosféricos que, ultrapassadas, poderão afetar a saúde, a segurança e o bem-estar da população, bem como ocasionar danos à flora e à fauna, aos materiais e ao meio ambiente em geral, e que deverão servir para orientar a elaboração de planos regionais de controle de poluição do ar (CONAMA, 1990).

A preocupação com a regulamentação aplicada às indústrias e o controle da emissão dos poluentes atmosféricos surgiu a partir do aumento do número de casos confirmados, de efeitos tóxicos dos agentes poluidores, presentes na atmosfera e partir de estudos epidemiológicos foram criados os padrões de exposição humana a esses poluentes (VIANNA, 2008).

No Brasil existem padrões de qualidade do ar legalmente estabelecidos, pelo CONAMA, para os seguintes poluentes: partículas totais em suspensão, fumaça, partículas inaláveis, dióxido de enxofre, monóxido de carbono, ozônio e dióxido de nitrogênio (Tab. 3) (LICCO, 2008).

Sabe-se que esses poluentes representam uma parcela relevante na degradação da qualidade do ar em ambientes urbanos e que não cobrem o total das substâncias químicas emitidas na atmosfera pelas diversas atividades socioeconômicas existentes (LICCO, 2008).

Tabela 3. Padrões de qualidade do ar no Brasil

Poluente	Padrão	Descrição
Partículas Totais em Suspensão	Primários	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média geométrica anual de 80µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 240µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano;</li> </ul>
	Secundários	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média geométrica anual de 60µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 150µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano.</li> </ul>
Fumaça	Primário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 60µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 150µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida por mais de uma vez.</li> </ul>
	Secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 40µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 100µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida uma de uma vez por ano</li> </ul>
Partículas inaláveis	Primário e secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 50µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 150 µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano.</li> </ul>
Dióxido de Enxofre	Primário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 80 µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 365 µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano.</li> </ul>
	Secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 40 µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 24h de 100 µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano.</li> </ul>
Monóxido de Carbono	Primário e secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração médio de 8h de 10.000 µg/m<sup>3</sup> de ar (9 ppm), que não deve ser excedida mais de uma vez por ano;</li> <li>• Concentração média de 01h de 40.000 µg/m<sup>3</sup> de ar (35 ppm), que não deve exceder mais de uma vez por ano.</li> </ul>
Ozônio	Primário e secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média de 01h de 160 µg/m<sup>3</sup> de ar, que não deve ser excedida mais de uma vez por ano.</li> </ul>
Dióxido de Nitrogênio	Primário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 100 µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 01h de 320 µg/m<sup>3</sup> de ar.</li> </ul>
	Secundário	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concentração média aritmética anual de 100 µg/m<sup>3</sup> de ar;</li> <li>• Concentração média de 01h de 190 µg/m<sup>3</sup> de ar.</li> </ul>

Fonte: CONAMA, Resolução 003/90

### 1.3.6 Efeitos da Poluição Atmosférica

A poluição do ar tem sido um grave problema dos centros urbanos industrializados, com presença cada vez maior dos automóveis, que em conjunto, somam às indústrias como grandes fontes poluidoras, comprometendo assim, a qualidade de vida da população urbana.

A vida dos seres vivos tem sido afetada, de alguma forma, pela poluição atmosférica, mesmo com os poluentes estando com os valores abaixo do nível permitido pelos órgãos responsáveis. Os grupos etários mais susceptíveis aos efeitos dessa poluição são as crianças e os idosos, onde, já foi mostrada uma associação positiva entre mortalidade e morbidade por problemas respiratórios em crianças, como também, aumentos de morbidade e de mortalidade por doenças respiratórias e cardiovasculares nos idosos (MARTINS, 2002).

Segundo Beg *apud* Brait (2010), a urbanização que tem ocorrido em todo mundo de forma muito rápida, consequência do desenvolvimento econômico baseado principalmente em industrialização, onde é caracterizada pela relação entre a população de áreas urbanas com a população total do país. Com esse desenvolvimento, podem ser observados diversos problemas ambientais causados pelo excesso de poluentes atmosféricos, principalmente em países em desenvolvimento como China, Índia e Indonésia.

A média da temperatura terrestre tem aumentado, gradualmente, devido à emissão desses gases. Sendo, o gás carbônico, considerado o principal vilão do efeito estufa, quando é liberado naturalmente através de todos os seres vivos que respiram oxigênio não causa efeitos danosos, por haver um equilíbrio com a natureza, mas isso não reflete nossa realidade atual, onde, após a Revolução Industrial passou-se a utilizar quantidades enormes de combustíveis que, ao serem queimados, liberam gás carbônico também, juntando-se com os outros gases e formando uma camada em torno da Terra que impede a dissipação do calor, resultando no aquecimento global (VERDADE; DIXO; CURCIO, 2010).

Dentre os gases ozônio, dióxido de carbono, metano, óxido nitroso e monóxido de carbono, responsáveis pelo efeito estufa, o dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) é principal deles e está distribuído entre quatro principais estoques de carbono: a atmosfera, os oceanos, os depósitos de combustível fóssil e a biomassa terrestre e solo (YU,

2004). Com essa afirmação pode-se evidenciar que a poluição atmosférica tem sua parcela de contribuição com o efeito estufa e conseqüentemente com o aquecimento global.

Com relação aos efeitos à saúde causados pela exposição à poluição atmosférica, eles podem variar de acordo com alguns fatores como a concentração dos poluentes, o tempo de exposição e a composição química (GOMES *apud* GIODA, 2006).

Esses efeitos podem se manifestar de diversas maneiras, desde mudanças bioquímicas e fisiológicas a episódios de sinusite, hipertensão, ardência nos olhos, estresse, escamação da pele, perda dos sentidos, dificuldade de respirar, tosse e agravamento de doenças respiratórias e cardíacas preexistentes, podendo resultar no aumento do uso de medicação e visitas ao médico, como também mais entradas em hospital e mortes prematuras (HECS *apud* GIODA, 2006).

As doenças cardiovasculares são consideradas responsáveis por 30% da mortalidade a nível mundial, onde se tem relacionado à morbimortalidade cardio e cerebrovascular com os potenciais efeitos da poluição atmosférica. Diversos poluentes como o CO, SO<sub>2</sub>, NO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> têm sido estudados, sendo que a maior atenção está voltada para a poluição por partículas em suspensão na atmosfera, cujo tamanho permita que a árvore traqueobrônquica e alvéolos pulmonares sejam atingidos (NOGUEIRA, 2009).

A Organização Mundial de Saúde (2001) alerta que a poluição atmosférica por partículas está em 13º causador de morte a nível mundial, onde é responsável por 800.000 mortes/ano. Esses poluentes são constituídos por uma mistura complexa de partículas sólidas e líquidas, de diferente diâmetro e composição, também, possui um semi-equilíbrio com compostos gasosos envolventes (ozono, SO<sub>2</sub>, NO<sub>2</sub>, CO) e compostos orgânicos voláteis e semi-voláteis (aldeídos, hidrocarbonetos aromáticos policíclicos).

Existem estudos epidemiológicos que comprovam que essas partículas, que variam em tamanho, composição e concentração, são as principais responsáveis pela maioria dos efeitos adversos da poluição atmosféricas. Como também, são responsáveis por diversos efeitos agudos ou crônicos na saúde humana (NOGUEIRA, 2009).

As partículas em suspensão são procedentes tanto de maneiras antrópicas quanto naturais. Essas partículas quando possuem diâmetro inferior a  $10\mu\text{m}$  ( $\text{MP}_{10}$ ) são inaláveis pelo sistema respiratório (TOLEDO *apud* BRAIT, 2010) e estão associadas a problemas como a asma (HALEK *apud* BRAIT, 2010) e com a rinite (ROSEIRO, 2003), são provenientes de tráfego de estradas não pavimentadas, moagem e trituração de materiais e vento carregado de poeira (MORAWSKA e OSTRO *apud* BRAIT, 2010).

Muitas evidências científicas associam problemas dos vasos sanguíneos e da circulação sanguínea, como também, o comprometimento do coração à exposição de material particulado. Nos EUA, em 1993, foi relatado um potencial de danos cardiovasculares associados à poluição urbana, mediante comparação dos vizinhos de casos de mortalidade cardiopulmonar associados à exposição  $\text{MP}_{10}$  em seis grandes cidades americanas (DOCKERY *apud* FERNANDES, 2010).

As partículas em suspensão consideradas finas ( $\text{MP}_{2,5}$ ), que possuem o diâmetro inferior a  $2,5\mu\text{m}$  são formadas a partir da combustão de veículos automotores, queima de madeira, etc. Essas partículas podem se acumular no trato respiratório e estão associados com vários problemas de saúde, dentre eles problemas cardíacos e pulmonares, problemas respiratórios como a disfunção pulmonar e também com a morte prematura. (MORAWSKA e OSTRO *apud* BRAIT, 2010).

Segundo Fernandes (2010), a isquemia e infarto no miocárdio são os mais temidos eventos cardiovasculares potencialmente desencadeados pela exposição ao  $\text{MP}_{2,5}$ .

Os efeitos da poluição atmosférica provocadas pelo  $\text{MP}_{2,5}$  durante a gestação não foi estudado com a mesma proporção que os sistemas respiratório e circulatório, porém, constataram-se como efeitos mais comuns o crescimento intrauterino restrito, a prematuridade e o baixo peso ao nascimento (FERNANDES, 2010).

As partículas mais perigosas são aquelas com diâmetro inferior a  $0,1\mu\text{m}$  ( $\text{MP}_{0,1}$ ) que podem provocar danos irreversíveis aos alvéolos pulmonares (TOLEDO *apud* BRAIT, 2010), onde elas podem ultrapassar a membrana alveolar atingindo a circulação sistêmica. (NOGUEIRA, 2009).

O efeito nocivo que a poluição do ar causa ao sistema respiratório vem sendo mostrado por vários estudiosos, favorecendo no desenvolvimento de vários aparelhos mais precisos e capazes de fornecer informações valiosas, onde, conseguem mensurar quantidades muito pequenas de matérias presente no ar. Assim, com crescimento paralelo das informações sobre o mecanismo de agressão do sistema respiratório, descobriu-se que os poluentes atmosféricos podem ser os principais causadores de diversos problemas a esse sistema (FERNANDES, 2010).

Após estudos realizados em alguns municípios de São Paulo e Rio de Janeiro, pode-se afirmar que os níveis de poluição vivenciados nesses municípios são suficientes para agravar problemas respiratórios e cardiovasculares em idosos e crianças mesmo estando dentro do limite considerável aceitável (GOUVEIA, 2003).

Através de um estudo, realizado no período de 2006 a 2008, visando verificar o impacto causado à saúde humana, pelo material particulado emitido através das queimadas na Amazônia, ficou constatada certa associação com a ocorrência de doenças respiratórias, em especial nos grupos etários mais vulneráveis, como as crianças e os idosos da Amazônia (IGNOTTI, 2010).

Em regiões metropolitanas como Santiago, São Paulo, México e Nova Iorque, onde há um crescimento industrial desordenado e um aumento significativo da frota de veículos automotores, observou-se o aumento dos índices de morbimortalidade referente às doenças respiratórias e cardiovasculares. Na Europa, encontrou-se associação entre mortalidade causada por doenças respiratórias e cardiovasculares com o local de moradia. Ou seja, quanto mais próxima, a residência, de vias de grande fluxo de veículos, maior o risco de morte por essas doenças (VIANNA, 2008).

Segundo Nogueira (2009), ficou evidenciado, através de um estudo, que 60.000 das 350.000 mortes súbitas anuais nos EUA poderiam ter como causa principal a poluição atmosférica por partículas inaláveis. Foi percebida uma associação entre a poluição atmosférica e a elevação da pressão arterial, que poderá colaborar para o aumento do risco cardiovascular. E, após alguns estudos ficou comprovado o aumento de Acidente Vascular Cerebral (AVC) em pessoas que viviam em zonas de grande poluição ou próximas a vias com tráfego intenso.

Durante oito anos, na Holanda, 5.000 pessoas foram avaliadas para verificar a associação da mortalidade cardiopulmonar ao grau de exposição ao tráfego de

veículos, ficando evidenciado o aumento de 95% no risco de mortalidade cardiopulmonar para quem vive nas proximidades das vias de grande tráfego (HOEK *apud* FERNANDES, 2010).

Foram encontradas evidências da incidência de doenças do aparelho respiratório, decorrente do aumento da poluição atmosférica. Essas evidências vieram comprovar o aumento da incidência de doenças dos aparelhos respiratório e circulatório resultante da intensificação da poluição atmosférica (HESS, 2009).

### **1.3.7 Controle da Poluição Atmosférica**

De forma geral, o controle da poluição atmosférica em escala local ou regional é realizado principalmente através de alguma rede de monitoramento da qualidade do ar. Esta rede constitui um instrumento útil para a segurança da saúde humana e do ambiente, e permite analisar o benefício de ações de melhoria da qualidade do ar, como também, predispor intervenções específicas no caso de acontecer superação dos níveis do limiar estabelecido pela legislação (COUTO et al, 2007).

Em 2004, foi realizado um estudo no Complexo de Manguinhos, localizado na cidade do Rio de Janeiro, onde foram coletadas Informações sobre a qualidade do ar, através de uma unidade móvel de monitoramento de poluentes. Foi selecionada uma amostra de 120 alunos de uma escola pública, onde se observou aumentos específicos nos níveis de  $MP_{10}$  e  $NO_2$ , do qual ficou constatada, em um curto prazo, a associação da poluição do ar com a redução da função pulmonar dos alunos (CASTRO, 2009).

Segundo Dales (2009), a dor de cabeça ou cefaléia é uma importante causa de morbidade na sociedade moderna. Pensando nisso, foi realizado um estudo onde durante cinco anos, foram coletados, diariamente, dados da poluição do ar em Santiago do Chile. Essa coleta foi realizada através de sete estações de monitoramento em sete regiões distintas, ao final do estudo foi descoberto que, na Província de Santiago, o aumento agudo da poluição do ar estava associado com o aumento no número de internações hospitalares para dor de cabeça.

Na gestão ou proteção da qualidade do ar é imprescindível o conhecimento do estado do ambiente, onde parte desse conhecimento pode ser obtida através da rede de pesquisa voltada para o assunto e através do inventário das fontes de

emissão e a outra parte vem da interpretação dos dados coletados. Para se fazer o controle da qualidade do ar é necessário extrapolar no espaço e no tempo os valores medidos na posição dos analisadores, desta forma, será necessário utilizar de algum modelo matemático que é capaz de ligar a fonte de poluição ao efeito (MOREIRA; TIRABASSI, 2004).

Os processos que controlam o transporte e a difusão dos poluentes na atmosfera são muitos e tão complexos que fica praticamente impossível descrevê-los sem a utilização de modelos matemáticos. Assim, tais modelos podem ser considerados um instrumento técnico indispensável para a gestão ambiental, pois são capazes de descrever e interpretar os dados experimentais, controlar em tempo real e/ou analisar a qualidade do ar, administrar as liberações acidentais e avaliar as áreas de risco, identificar as fontes poluidoras, avaliar a contribuição de uma única fonte à carga poluidora e administrar e planejar o território (MOREIRA; TIRABASSI, 2004).

Os modelos matemáticos que simulam o transporte e a difusão dos poluentes na atmosfera constituem uma importante ferramenta para auxiliar as medidas de concentrações e saber a evolução das mesmas (MOREIRA; TIRABASSI, 2004).

Por motivos de caráter econômico e administrativo, o número de pontos de coleta em uma rede geralmente é limitado e, acima de tudo, a disposição espacial deles geralmente não é estudada cuidadosamente, podendo esses pontos estar posicionados em um local pouco representativo (MOREIRA; TIRABASSI; MORAES, 2008).

Com a utilização dos modelos matemáticos é possível fazer previsões ou mesmo simular campos de concentração em conexão, com políticas de limitação da liberação de poluentes em concordância com planos de melhoria da qualidade de vida de uma população (MOREIRA; TIRABASSI, 2004).

Uma vez acertada a boa qualidade da resposta fornecida por um modelo será permitido analisar a contribuição das diversas fontes para a poluição geral, e então propor corretamente eventuais ações de limitação dessas emissões (EDWARDS, 2002).

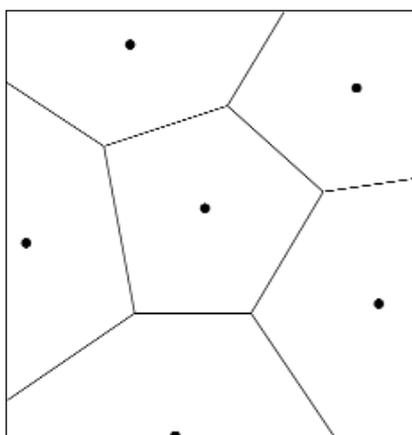
### 1.3.8 Diagramas de Voronoi

Os diagramas de Voronoi permitem a subdivisão das regiões em um conjunto de áreas de abrangência, estabelecendo relações de proximidades. Se forem considerados os sensores de poluição atmosférica como os pontos geradores dos diagramas de Voronoi, teremos a área de abrangência de cada sensor.

#### 1.3.8.1 Histórico e Definição geral

A definição dos diagramas de Voronoi (Fig.1), assim como das triangulações de Delaunay, é muito antiga e pode ser vista em *Part III of Principia Philosophiae* e *Le Monde*, trabalhos de Descartes em 1644, sendo que o segundo foi escrito cerca de uma década antes disso (OKABE et al, 2000). Nesses trabalhos pode-se notar a semelhança entre os diagramas de Voronoi e a demonstração de Descartes sobre a disposição de matéria no sistema solar.

**Figura 1:** Diagrama de Voronoi



**Fonte:** RESENDE; ALMEIDA; NOBRE, 2000.

Georgy Feodosevich Voronoi, em sua tese de Doutorado intitulada *Ob odnom obobshchenii algoritma nepreryvnykh drobei*, sobre uma generalização do algoritmo de quebra de cadeias, desenvolveu, em 1896, um método onde, com base em uma triangulação pré-existente de pontos que representam os centros de interesse, se

determina qual a área de influência de cada um destes centros em função da posição dos outros centros, delimitando de forma geométrica cada área de influência (AURENHAMMER; KLEIN, 2000).

Por se tratar de conjuntos de estruturas tão semelhantes com outras formas naturais encontradas em todo o mundo e de ser um conceito tão facilmente aplicado em áreas distintas do conhecimento humano, é muito difícil estabelecer, ou até mesmo acreditar, que há uma data exata para a descoberta dos conceitos e propriedades dos diagramas.

As primeiras contribuições compreensíveis sobre o tema foram apresentadas nos trabalhos de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Georgy Feodosevich Voronoy, matemáticos especialistas em álgebra, mais especificamente no estudo das formas quadráticas de números inteiros. Seus estudos no campo os levaram a considerar uma forma especial de diagrama de Voronoi, onde Dirichlet se concentrou nos casos de duas e três dimensões, enquanto que Voronoy se preocupou com os casos de ordem  $m$  (OKABE et al, 2000).

O principal objeto de estudo de ambos era a distribuição de pontos com coordenadas inteiras que davam os mínimos de uma forma quadrática. Nesse contexto, têm-se conjuntos de pontos que são regularmente distribuídos em um espaço  $m$ -dimensional. Assim, esses pontos são gerados através de infinitas combinações (para os casos onde o espaço dimensional é  $m$ ) entre infinitos coeficientes de vetores de inteiros. Mais uma vez, Dirichlet preocupou-se nos casos onde  $m$  fosse igual a dois ou três, ou seja, para  $m$  igual a dois temos as combinações de pontos entre dois vetores de inteiros linearmente independentes (representando os mínimos de uma função) que ao se aplicar a partição desses pontos na forma dos diagramas de Voronoi, têm-se poliedros congruentes (OKABE et al, 2000).

### 1.3.8.2 Tipos de Diagramas de Voronoi

#### 1.3.8.2.1 Diagramas de Voronoi simples

Inicialmente, define-se de forma bastante intuitiva o que seria um diagrama de Voronoi, para logo em seguida defini-lo de forma mais matemática. Mas antes de qualquer definição, alguns conceitos e termos importantes devem ser apresentados, para o completo entendimento dos diagramas.

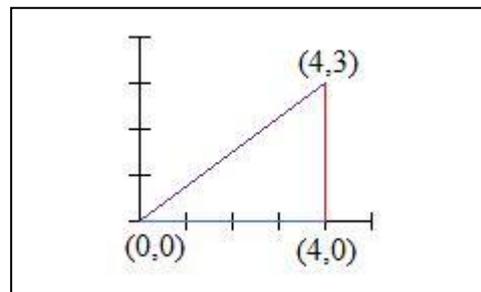
Ponto regional (ou pontos regionais) pode ser compreendido como todo e qualquer ponto que não faz parte do conjunto inicial de pontos dados, ou melhor, os pontos que gerarão o diagrama.

Outro item importante é o conceito matemático de distância euclidiana no  $\mathbb{R}^2$ :

$$E_{\text{dist}}(p_{x,y}, q_{x,y}) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}, \quad (1).$$

A distância euclidiana nos informa, precisamente, a distância exata entre dois pontos quaisquer no plano. Como exemplo do conceito, observa-se um triângulo retângulo (Fig.2) cujo vértice inferior esquerdo esteja estacionado sobre o ponto  $(0,0)$  e cujos lados sejam três (3, cateto), quatro (4, cateto) e  $x$  (hipotenusa):

**Figura 2:** Triângulo retângulo 3, 4 e 5.



Fonte: OKABE et al, 2000.

Pela fórmula de Pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (2),$$

temos:

$$3^2 + 4^2 = c^2 \therefore \sqrt{9 + 16} = c \therefore c = \sqrt{25} \therefore c = 5, \quad (2),$$

e pela distância euclidiana,

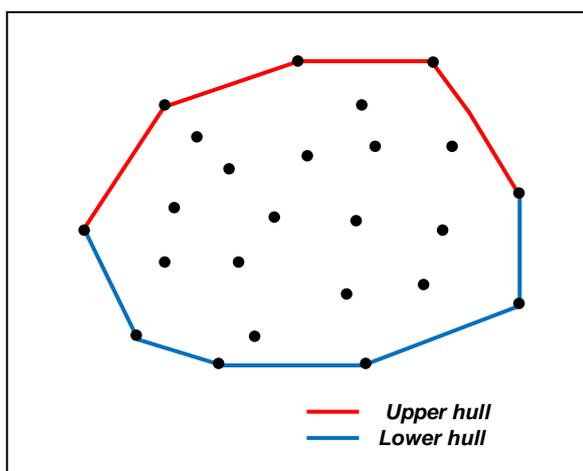
$$E_{dist}(p_{x,y}, q_{x,y}) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}, \quad (1),$$

temos:

$$E_{dist}(p_{0,0}, q_{4,3}) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5, \quad (1).$$

O *fecho convexo* é uma definição aplicada a um conjunto de pontos espalhados no plano. Sendo assim, o *fecho convexo* é o perímetro que passa pelos pontos mais externos do conjunto de pontos de forma tal que temos um polígono convexo (Fig. 3).

**Figura 3:** O *fecho convexo* de um conjunto de pontos. O *upper hull* (limite superior) e o *lower hull* (limite inferior) que são usados para algoritmos de identificação do *fecho convexo*.



Fonte: Figura criada pelo autor.

### 1º Diagrama ordinário e planar de Voronoi:

Considerando um conjunto finito de dois ou mais pontos no plano euclidiano, associa-se todas as demais localizações do plano àqueles pontos do conjunto que estão mais próximos, tendo em vista a distância euclidiana. O resultado dessa associação é uma divisão em regiões as quais chamamos de regiões simples de Voronoi (OKABE et al, 2000).

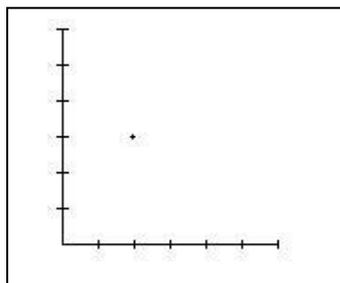
Uma vez entendido como funciona o plano euclidiano e a sua divisão em regiões de Voronoi simples, isto é, sem causar confusão com as generalizações dos

diagramas de ordens maiores ( $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^n$ , ...), podemos chamá-los simplesmente de diagrama de Voronoi e suas regiões de células de Voronoi, ou regiões do diagrama (OKABE et al, 2000).

A definição matemática de uma célula de Voronoi pode ser compreendida como um conjunto de pontos no plano euclidiano tal que  $2 \leq n < \infty$ , nomeados  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n$ . Sejam  $(x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$  suas respectivas coordenadas, ou,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seus vetores de posição (onde  $x_m = (x_x, x_y)$ ). Então, os  $n$  pontos são distintos para todo  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$  e  $i, j \in I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Se  $p$  é um ponto arbitrário no plano euclidiano com coordenadas  $(x_1, x_2)$ , ou vetor de posição  $x$ , então a distância euclidiana entre  $p$  e  $p_i$  é dada por  $E_{\text{dist}}(p, p_i) = \|x - x_i\| = \sqrt{(x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2}$ . Se  $p_i$  é o ponto mais próximo de  $p$ , ou  $p_i$  é um dos pontos mais próximos de  $p$ , nós temos a relação  $\|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|$  para todo  $j \neq i$ , onde  $i, j \in I_n$ .

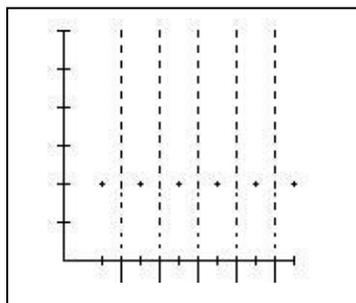
Como exemplo, segue alguns casos onde a solução é trivial e, particularmente, melhor entendida através de gráficos (Fig.4 e Fig.5).

**Figura 4:** Um único ponto é dado, logo, a região de Voronoi coincide com todo o plano, pois apenas um ponto foi definido. Por consequência, todos os outros pontos do plano estarão mais próximos desse ponto.



Fonte: OKABE et al, 2000.

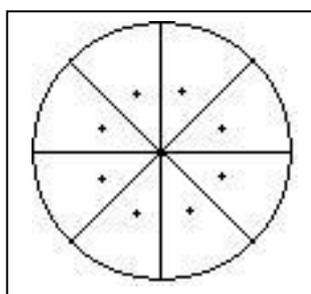
**Figura 5:** Um conjunto de pontos colineares cuja divisão em um diagrama de Voronoi gera linhas paralelas infinitas, e consequentemente regiões adjacentes infinitas.



Fonte: OKABE et al, 2000.

Segundo Berg (2008), um diagrama gerado por apenas dois pontos é analisado de maneira semelhante a um conjunto de pontos colineares. Nota-se que qualquer dois pontos, em um conjunto de oito de pontos, espalhados de forma circular, em uma circunferência, gerará um diagrama parecido com o da Fig. 6, podendo ser observado que há regiões onde os pontos regionais estão equidistantes de pelo menos dois pontos principais. Esses pontos incidem exatamente sobre as retas que dividem as regiões de Voronoi, ou seja, a única localização onde há uma sobreposição de regiões é na área limítrofe de uma região (suas bordas). Assim, toda reta que divide o plano (Fig.6) está equidistante de dois pontos e pode ser observado que em diagramas gerados por pontos configurados aleatoriamente no espaço, um único ponto pode estar equidistante de N regiões diferentes.

**Figura 6:** Um conjunto de oito pontos espalhados de forma circular em uma circunferência, causando um efeito de torta, onde pode ser observado que o ponto central da circunferência é equidistante das oito regiões.



Fonte: OKABE et al, 2000.

## 2º Diagrama de Voronoi ordinário:

Considerando  $P = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \} \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $2 < n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ ,  $i, j \in I_n$  (OKABE et al, 2000). Obtém-se uma região de Voronoi, ou célula de Voronoi, ou simplesmente  $V(p_i)$ , quando:

$$V(p_i) = \{ x \mid |x - x_i| \leq |x - x_j| \quad \forall j \neq i, j \in I_n \} \quad (3)$$

e conseqüentemente um diagrama de Voronoi ordinário, quando consideradas todas as células de Voronoi, ou seja:

$$V = \{ V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n) \} \quad (4)$$

**Bordas** – podem ser retas, semirretas, e retas infinitas. Quando se trata de diagramas de Voronoi, essas bordas recebem o nome de arestas de Voronoi (ou

apenas arestas). Diz-se que  $e(p_i, p_j)$  é uma aresta de Voronoi, e sabe-se que  $e(p_i, p_j) = V(p_i) \cap V(p_j)$ , ou seja, a aresta é gerada pela interseção de duas regiões. Pode-se notar que  $e(p_i, p_j)$  pode ser vazio.

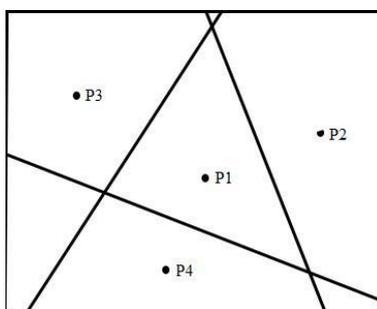
**Regiões** - diz-se que duas regiões de Voronoi são **adjacentes** se  $V(p_i) \cap V(p_j) \neq \emptyset$  e  $V(p_i) \cap V(p_j)$  gera mais de um ponto (OKABE et al, 2000).

**Vértice** - um vértice de Voronoi é o início ou final de uma aresta, na Fig. 6 podem ser observados nove vértices. Quando um vértice é dividido por pelo menos quatro arestas distintas, diz-se que o diagrama é degenerado, como é o caso do diagrama fornecido pela Fig. 6 (OKABE et al, 2000).

Os diagramas descritos anteriormente são uma especialização do caso genérico dos diagramas de Voronoi. O caso genérico fala dos diagramas em um plano  $R^m$ , e não  $R^2$ .

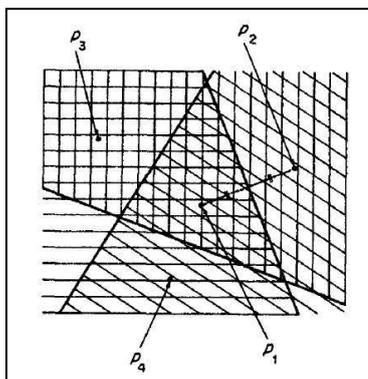
O caso m-dimensional é mais difícil de visualizar, mas é facilmente explicado se for observado o seguinte:

**Figura 7:** Um diagrama de Voronoi definido em termos de semi-planos.



Fonte: OKABE et al, 2000.

**Figura 8:** Um diagrama de Voronoi definido em termos de semi-planos com as áreas de dominância de cada ponto gerador em relação a P1.



Fonte: OKABE et al, 2000.

Os diagramas podem ser obtidos a partir de semi-planos (Fig. 7 e Fig. 8). Assim, pode-se perceber que há uma área de dominância de um ponto gerador entre os outros pontos geradores, isto é, o ponto P1 tem uma região de dominância sobre os pontos P2, P3 e P4 como indicam as linhas horizontais, diagonais, e verticais respectivamente. O caso específico da região de P4, não há linhas verticais, isso significa que no semi-plano inferior gerado pelos pontos P1 e P4, a dominância é do ponto P4 sobre o ponto P1.

**3º Diagramas de Voronoi gerados a partir de semi-planos:** Seja  $P = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \} \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $2 \leq n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n$ . Então:

$$V(P_i) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(P_i, P_j), \quad (5)$$

é a região de Voronoi e que o conjunto  $V(P) = \{V(P_1), \dots, V(P_n)\}$  é o diagrama ordinário de Voronoi. Essa definição é facilmente estendida para o caso de  $m$  dimensões.

**4º Diagramas de Voronoi em  $\mathbb{R}^m$ :** Se  $P = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^m$ , onde  $2 \leq n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n$ . Chama-se, a região

$$\begin{aligned} V(P_i) &= \{x \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \text{ para } i \neq j, j \in I_n\} \\ &= \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(P_i, P_j), \end{aligned} \quad (6)$$

de região de Voronoi no espaço  $\mathbb{R}^m$  e o conjunto  $V(P) = \{V(P_1), \dots, V(P_n)\}$  o diagrama de Voronoi no espaço  $\mathbb{R}^m$  gerado por  $P$ .  $H(P_i, P_j)$  é dado pela partição do plano em bissetores tal que  $b(P_i, P_j) = \{x \mid \|x - x_i\| = \|x - x_j\|\}$  onde  $j \neq i$  e  $H(P_i, P_j) = \{x \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|\}$  para  $j \neq i$ .

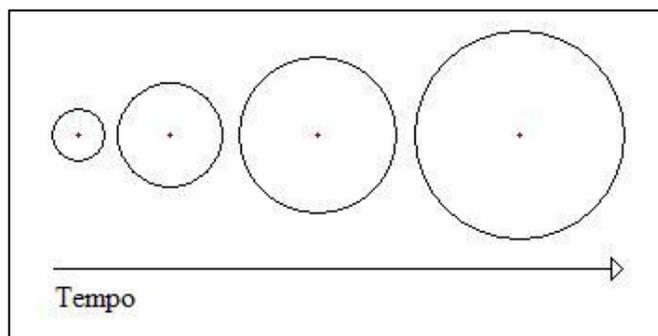
#### 1.3.8.2.2 Diagramas de Voronoi valorados

Na natureza, planeta terra ou universo, formas e comportamentos seguem padrões que muitas vezes não são claros para os seres humanos. Alguns desses padrões, em algumas raras ocasiões, são observados, estudados e documentados. Um bom exemplo é o da série de Fibonacci. Tal série tem inúmeras aplicações nos mais variados campos de conhecimento. Na natureza, vários são os casos onde se encontram formas que seguem o padrão da série de Fibonacci (concha dos caracóis

proporção da mão humana, espiral de uma nebulosa, composição das sementes do girassol, etc.). Como naquela série, os diagramas de Voronoi simples são encontrados em vários cenários naturais, mas em alguns casos se faz necessários ajustes no cálculo das regiões para que se tenha um padrão condizente com o objeto estudado.

Como exemplo, pode-se imaginar vários pontos no plano euclidiano, onde esses pontos representam sementes com taxa de crescimento constante e igual para todas. Cada semente tem um momento de início de crescimento diferente e seu crescimento é circular com o centro permanecendo na mesma posição (Fig. 9). Imaginando várias dessas sementes no plano, é fácil perceber que em um determinado momento, as sementes começarão a se colidir entre si surgindo a dúvida de como será o padrão de crescimento a partir deste momento. Simular esse crescimento utilizando os diagramas de Voronoi simples seria impossível, e os resultados não seriam condizentes com o objeto real.

**Figura 9:** Ilustração do crescimento uniforme de cada semente.



**Fonte:** OKABE et al, 2000.

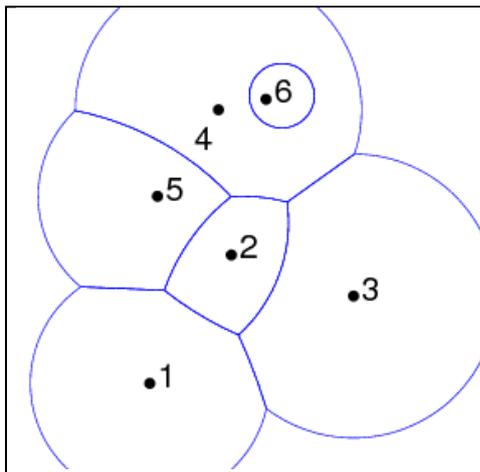
Para simular tal padrão podem ser aplicados pesos às taxas de crescimento considerando assim, que todas as sementes tenham iniciado o processo de crescimento ao mesmo instante. Esta situação hipotética foi pensada a partir de um exemplo em Okabe (2000), mas tomando uma situação real.

Utilizando essa ideia dos pesos surgiram os Diagramas de Voronoi Valorados, onde esses diagramas podem mudar de acordo com funções de peso, formando padrões bem interessantes Okabe (2000).

### 1.3.8.2.2.1 Diagramas de Voronoi valorados multiplicativos

Os diagramas de Voronoi valorados multiplicativos são bem diferentes quando comparamos com os casos simples, mas na realidade são mais uma generalização desses.

**Figura 10:** Diagrama de Voronoi Multiplicativo.



**Fonte:** <http://tintoretto.ucsd.edu/andrew/voronoi.html>.

Um diagrama de Voronoi valorado multiplicativo (DVVM) é obtido a partir da multiplicação de pesos pela distância dos vetores de posição, ou seja:

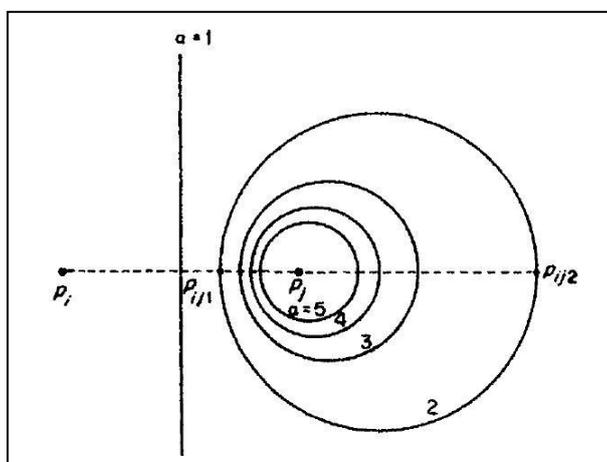
$$d_{vm}(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \|x - x_i\|, w_i > 0 \quad (12)$$

Já a mediatriz de dois pontos no plano é dada por:

$$b(p_i, p_j) = \left\{ x \mid \left\| x - \frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} x_j + \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} x_i \right\| = \frac{w_i w_j}{w_i^2 - w_j^2} \|x_j - x_i\| \right\} \quad (13)$$

Essa mediatriz é o lugar de um ponto  $p$  que satisfazendo a condição de que  $p$  mantém uma distância constante do ponto  $\left[ \frac{w_i^2 x_j}{(w_i^2 - w_j^2)} - \frac{w_j^2 x_i}{(w_i^2 - w_j^2)} \right]$ . Pela função, nota-se que se trata de um círculo quando em  $\mathbb{R}^2$ . Tal círculo passa perpendicularmente à reta  $\overline{p_i p_j}$  nos pontos de divisão interna e externa com proporção  $w_i/w_j$ , veja:

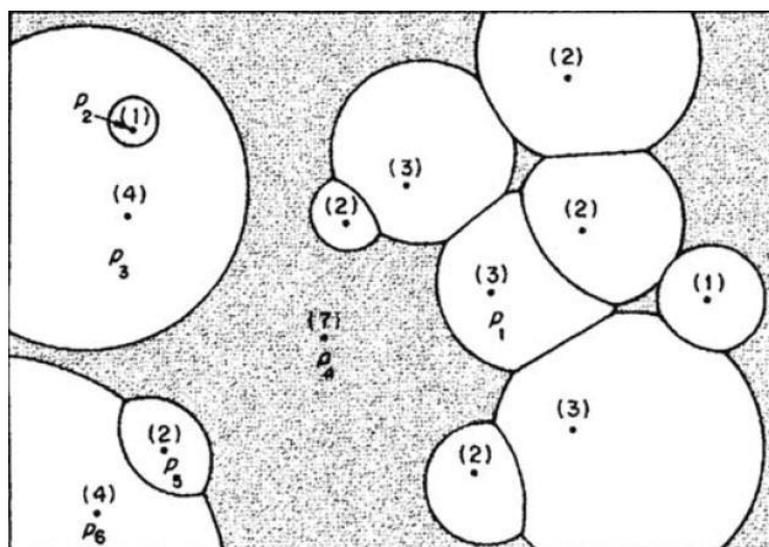
**Figura 11:** Círculos baseados na mediatriz entre os pontos  $p_i$  e  $p_j$  para diferentes proporções dos pesos  $w_i$  e  $w_j$ . Sendo  $\alpha = w_i / w_j = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ .



Fonte: OKABE et al, 2000.

Nota-se que ao atribuir peso um ao cálculo da distância, consegue-se a distância euclidiana simples, demonstrando assim que o diagrama multiplicativo é apenas uma generalização dos diagramas de Voronoi simples.

**Figura 12:** Um diagrama de Voronoi valorado multiplicativo (DVVM) no  $R^2$  com os pesos indicados entre parênteses.



Fonte: OKABE et al, 2000.

Existem algumas diferenças entre o DVVM e o diagrama de Voronoi simples, como a ausência de polígonos, uma vez que as regiões de Voronoi se

transformaram em objetos circulares, como também o fato de  $P_2$  estar contido em  $P_3$ , e  $P_4$  está englobando todas as outras células e é desconexo (Fig. 12). Uma propriedade intrigante é que as regiões adjacentes a uma região convexa não têm pesos menores que a região convexa. Na Fig. 12, pode-se perceber que  $P_5$  tem peso menor que  $P_6$  e que  $P_1$  tem peso maior que a região adjacente na posição nordeste. Assim, visualizando as regiões em conjunto com as equações de definição de mediatriz e distância, temos:

1. Uma região de um DVVM é um conjunto não vazio; pode ser não convexo e pode conter furos (ou conter outras regiões, caso de  $P_3$  em relação a  $P_2$ ). São convexos apenas se as regiões adjacentes tiverem pesos iguais ou maiores que seu próprio peso;
2. A região de Voronoi que possui maior peso domina as áreas que estão longe da dominância de outros pontos geradores e por tal motivo tem área infinita. Mas enquanto houver pontos com pesos iguais, apenas aqueles sobre o *fecho convexo* terão área infinita e não terão bordas (arestas). Percebe-se um único ponto cujo peso é maior que todos os outros, logo sua área é infinita (área cinza);
3. Nota-se a partir da imagem que a aresta compartilhada entre  $P_4$  e  $P_6$  é desconexa e que a aresta compartilhada entre  $P_1$  e a região adjacente a sudeste é uma reta, daí temos que: duas regiões de um DVVM podem compartilhar arestas desconexas. As regiões terão arcos circulares como arestas se os pesos dos pontos geradores forem diferentes e tal aresta será uma reta quando os pesos dos pontos geradores forem iguais.

Obviamente essas propriedades se aplicam ao caso simples, mas como os pesos neste caso particular são todos iguais, tais propriedades são ocultadas.

#### 1.3.8.2.2 Diagramas de Voronoi valorados aditivos

Como no DVVM, tem-se uma equação diferente para o cálculo da distância. Neste caso, como o próprio nome já diz, o peso será acrescentado à fórmula de forma que esse diagrama de Voronoi valorado aditivo (DVVA) seja também apenas

um caso generalizado do diagrama simples, podendo-se aplicar este conceito ao cálculo da distância da seguinte forma:

$$d_{av}(p, p_i) = \left| \|x-x_i\| - w_i \right| \quad (14)$$

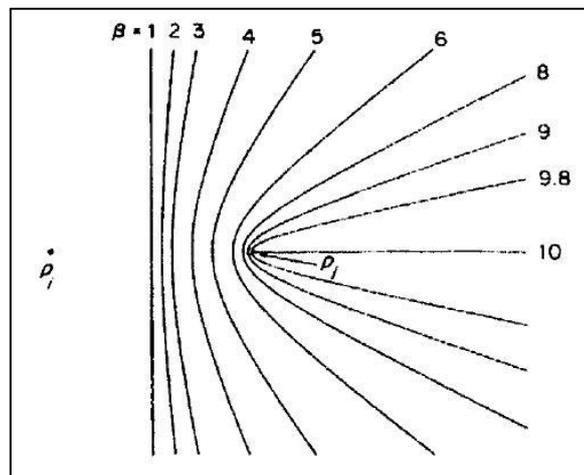
Esta distância é chamada de distância valorada aditiva segundo Okabe (2000). E a área de dominância de uma região sobre a outra é dada por:

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \{ x \mid \left| \|x-x_i\| - \|x-x_j\| \right| \leq w_i - w_j \}, i \neq j \quad (15)$$

Tendo como parâmetros  $\alpha = \|x_i - x_j\|$  e  $\beta = w_i - w_j$  (assumindo que este resultado é positivo), nota-se que a forma da área de dominância varia conforme esses parâmetros variam. Os casos onde  $0 < \alpha < \beta$  ou  $\alpha = \beta$  são casos onde o comportamento da mediatriz não é bem definido. No primeiro, a área de dominância de  $P_j$  desaparece ou a área de dominância de  $P_i$  domina todo o plano, tal caso nunca acontece segundo Okabe (2000). No segundo, a área de dominância é todo o plano, exceto por uma linha que irradia de  $P_i$  em direção a  $P_j$ . O único caso onde a análise é válida é quando  $\alpha > \beta$ , a partir dessa associação podemos analisar o comportamento da mediatriz para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Segue função de partição do espaço:

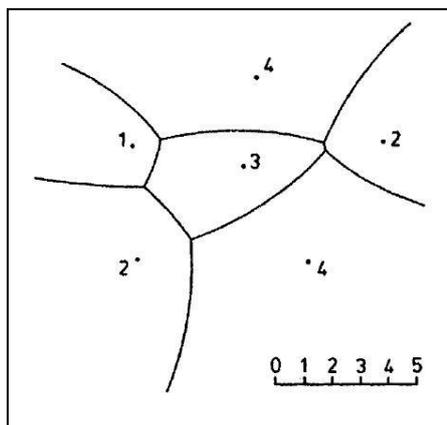
$$b(p_i, p_j) = \{ x \mid \left| \|x-x_i\| - \|x-x_j\| \right| = \beta \} \text{ se } i \neq j \text{ e } \alpha > \beta \quad (16)$$

**Figura 13:** As mediatrizes para valores de  $\alpha = 10$  e  $\beta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 9.8, 10\}$ . Note a semi-reta quando  $\beta = 10$ .



Fonte: OKABE et al, 2000.

**Figura 14:** Um diagrama de Voronoi valorado aditivo. Os números indicam os pesos.



Fonte: OKABE et al, 2000.

Da observação dos resultados e análise das equações pode-se admitir algumas propriedades:

1. Segundo a equação (16) e Fig.13 observa-se que uma aresta de uma região de um DVVA ou é uma reta ou é um arco hiperbólico;
2. O conjunto contido pela região  $V(p_i)$  é vazio se, e somente se

$$\min_{j \neq i} \left\{ \left| |x-x_i| \right| - w_j, j \in I_n \right\} < -w_i, \quad (17);$$

3. O conjunto contido pela região  $V(p_i)$  é uma reta, ou semi-reta, se e somente se

$$\min_{j \neq i} \left\{ \left| |x-x_i| \right| - w_j, j \in I_n \right\} = -w_i, \quad (18);$$

4. O conjunto contido pela região  $V(p_i)$  tem uma área positiva, se e somente se

$$\min_{j \neq i} \left\{ \left| |x-x_i| \right| - w_j, j \in I_n \right\} > -w_i, \quad (19);$$

5. Se ao menos um peso for diferente dos demais e a relação (19) se mantiver, então existe pelo menos uma região não convexa, e tais regiões assumem uma forma de estrela em relação ao seu ponto gerador.

### 1.3.8.2.2.3 Diagramas de Voronoi valorados compostos

Os diagramas de Voronoi valorados compostos (DVVC) são obtidos a partir da composição dos diagramas aditivos e multiplicativos. Segue cálculo da distância composta:

$$d_{vc}(p, p_i) = \frac{1}{w_{i1}} \left| |x-x_i| \right|^{-w_{i2}}, \quad w_{i1} > 0 \quad (20)$$

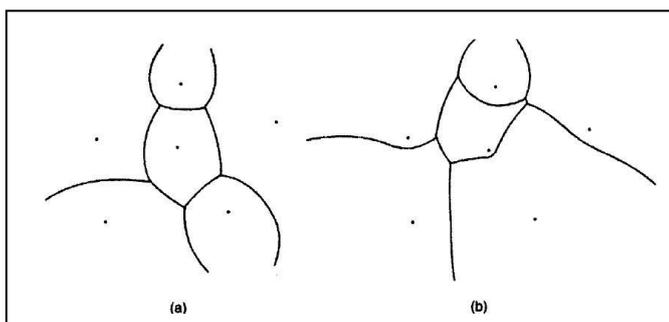
Note que a distância valorada composta ( $d_{vc}$ ) se transforma nas distâncias: aditiva ao fazer-se  $w_{i1} = 1$ ; multiplicativa caso tenha-se  $w_{i2} = 0$ ; e se transforma na distância euclidiana clássica quando  $w_{i1} = 1$  e  $w_{i2} = 0$ , neste caso o diagrama se resume a uma generalização do caso de diagramas de Voronoi ordinários.

A forma da mediatriz se torna bastante complexa quando são atribuídos valores diferentes aos pesos, mas é verificado que a função é estável e pode-se dizer que este é realmente um caso de generalização dos diagramas.

As propriedades desse tipo de diagrama são definidas exatamente como as propriedades dos DVVM e DVVA (diagramas multiplicativos e aditivos) quando se tem os casos especiais onde  $w_{i2} = 0$  e  $w_{i1} = 1$ , respectivamente. Ao se analisar a função com pesos distintos e diferentes dos mencionados, tem-se a seguinte propriedade:

- Uma aresta de um DVVC é parte da curva polinomial de ordem quatro, um arco hiperbólico (propriedade de um diagrama aditivo), um arco circular (propriedades do diagrama multiplicativo) ou uma reta (propriedades do DVVA e DVVM).

**Figura 15:** Diagramas de Voronoi compostos em  $R^2$



Fonte: OKABE et al, 2000.

#### 1.3.8.2.2.4 Diagramas de Voronoi valorados exponenciais

Esse tipo de diagrama pode ser estendido para as versões anteriores (DVVA e DVVM), mas antes, apresenta-se a função de distância modificada:

$$d_{ve}(x, x_i) = ||x-x_i||^2 - w_i \quad (21)$$

Há uma divergência na definição dessa função por parte de outros autores no que se refere a nomeação. Onde, Aurenhammer (1980) chama apenas de distância exponencial. Mas é importante notar a diferença entre a forma exponencial pura  $||x-x_i||^2$  para a forma apresentada anteriormente  $||x-x_i||^2 - w_i$  que adiciona características da função de distância do diagrama aditivo. Pode-se estender essa distância ainda para a forma multiplicativa onde ter-se-ia  $||x-x_i||^2 / w_j$ , mas dessa forma, através de alguns artifícios, chegar-se-ia na distância multiplicativa vista anteriormente.

A mediatriz definida é:

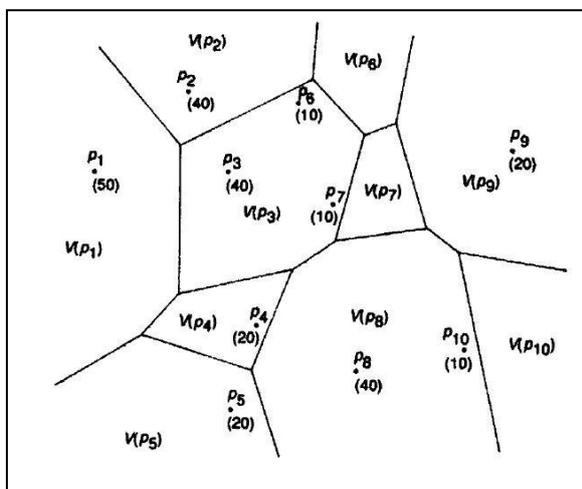
$$b(p_i, p_j) = \{x | (x_j - x_i)^T x = \frac{1}{2} (||x_j||^2 - ||x_i||^2 + w_i - w_j)\}, i \neq j \quad (22)$$

Sabe-se que tal mediatriz passa perpendicularmente a  $\overline{p_i p_j}$  e que na medida em que o peso  $w_i$  aumenta, a área de dominância de  $p_i$  sobre  $p_j$  também aumenta. Por tal motivo, geralmente é usado pesos positivos, mas matematicamente a utilização de pesos negativos procede (OKABE et al, 2000).

Sabendo-se que a mediatriz divide o plano em dois semi-planos disjuntos e tem-se uma função bem definida e estável, onde pode-se presumir algumas propriedades:

1. Se o conjunto definido pela região  $V(p_i)$  não é vazio, então, é um polígono convexo;
2. A região definida por  $V(p_i)$  pode conter não só seu ponto gerador  $p_i$ , mas pode conter também  $p_j$ ;

**Figura 16:** Um diagrama de Voronoi exponencial. Note que vários pontos geradores foram englobados por pontos cujos pesos eram maiores.



Fonte: OKABE et al, 2000.

### 1.3.8.3 Propriedades dos Diagramas de Voronoi Simples

Algumas propriedades dos diagramas de Voronoi simples serão abordadas. É importante saber as diferenças entre os diagramas simples e valorados, uma vez que algumas das propriedades vistas aqui não são aplicadas para diagramas valorados, ou são aplicadas sobre casos especiais onde o diagrama valorado se comporta como um diagrama simples. Uma dessas diferenças fica clara na primeira propriedade:

**Propriedade 1** – Sejam  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  (onde  $2 \leq n < \infty$ ) um conjunto de pontos distintos no plano euclidiano. O conjunto  $V(p_i)$  definido por:

$$V(p_i) = \{x \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \text{ para } j \neq i, j \in I_n\} \quad (7)$$

É um polígono convexo não vazio. Nota-se que essa propriedade não se aplica a alguns dos diagramas valorados, onde células de Voronoi podem ser não convexas;

**Propriedade 2** – Para um diagrama de Voronoi simples dado pelas mesmas condições da primeira propriedade, uma célula de Voronoi é infinita, ou seja, um de seus lados não existe e a célula se estende por todo o restante do plano, se e

somente se o seu ponto gerador se encontrar sobre o *fecho convexo* do conjunto de pontos (OKABE et al, 2000);

**Propriedade 3** – Para o diagrama de Voronoi gerado pelos pontos definidos na primeira propriedade, tem-se:

1. As arestas das células de Voronoi serão infinitas se  $P$  (propriedade 1) for colinear. Essa característica é fácil de perceber olhando-se a Fig. 5;
2. Uma aresta do diagrama é uma semi-reta se e somente se  $P$  não é colinear e  $p_i$  e  $p_j$  são pontos geradores consecutivos sobre o fecho convexo do conjunto de pontos;
3. Supondo uma aresta dada por  $p_i$  e  $p_j$ , esta aresta será uma reta finita se e somente se o segmento de reta  $\overline{p_i p_j}$  não fizer parte do fecho convexo do conjunto de pontos;

**Propriedade 4** – O ponto gerador mais próximo de  $p_i$  gera uma aresta da célula  $V(p_i)$ , a prova para esta propriedade é bem definida em Okabe (2000).

**Propriedade 5** – Da propriedade 4 é fácil notar que o ponto gerador mais próximo de  $p_i$  está nas regiões cujos polígonos dividem a aresta com a região dada por  $V(p_i)$ ;

**Propriedade 6** – Do conjunto de propriedades e conceitos vistos até o momento, percebe-se que o ponto gerador  $p_i$  é o ponto gerador mais próximo de  $p$ , se e somente se  $p$  estiver contido em  $V(p_i)$ . Essa propriedade pode ser retirada da própria definição de células de Voronoi. Para esta propriedade, nota-se apenas que se o ponto  $p$  estiver sobre os limites da célula  $V(p_i)$ , o ponto  $p$  estará equidistante de pelo menos dois pontos geradores;

**Propriedade 7** – Esta propriedade está diretamente relacionada com as triangulações de Delaunay. Assumindo que o diagrama de Voronoi não é um caso degenerado, para todo vértice  $q_i \in Q$  do diagrama, existe um círculo  $C_i$  único centrado em  $q_i$  que passa por exatamente três pontos geradores e não contém nenhum ponto em seu interior (OKABE et al, 2000);

**Propriedade 8** – Para todo círculo que obedece as regras da propriedade 7, tais círculos são os maiores círculos vazios possíveis tendo o centro em um vértice de um diagrama;

**Propriedade 9** – Sendo  $n$ ,  $n_e$  e  $n_v$  o número de pontos geradores, de arestas do diagrama e dos vértices dos diagramas de Voronoi no  $R^2$  respectivamente, tem-se:

$$n_v - n_e + n = 1, \quad (8)$$

**Propriedade 10** – Assumindo as mesmas variáveis da propriedade 9 e considerando  $3 \leq n \leq \infty$ , tem-se:

$$n_e \leq 3n - 6 \quad \text{e} \quad n_v \leq 2n - 5 \quad (9.a \text{ e } 9.b)$$

**Propriedade 11** – Sendo  $n$ ,  $n_e$ ,  $n_v$  e  $n_c$  a quantidade de pontos geradores, arestas do diagrama, vértices do diagrama e polígonos com pelo menos um de seus lados no infinito respectivamente. Assumindo que  $3 \leq n < \infty$  e que o conjunto de pontos não é colinear, tem-se (OKABE et al, 2000):

$$n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1 \quad (10)$$

$$n_e \leq 3n_v - n_c - 3 \quad (11)$$

**Propriedade 12** – A média de arestas por célula de Voronoi não ultrapassa 6;

#### 1.3.8.4 Aplicações dos Diagramas de Voronoi

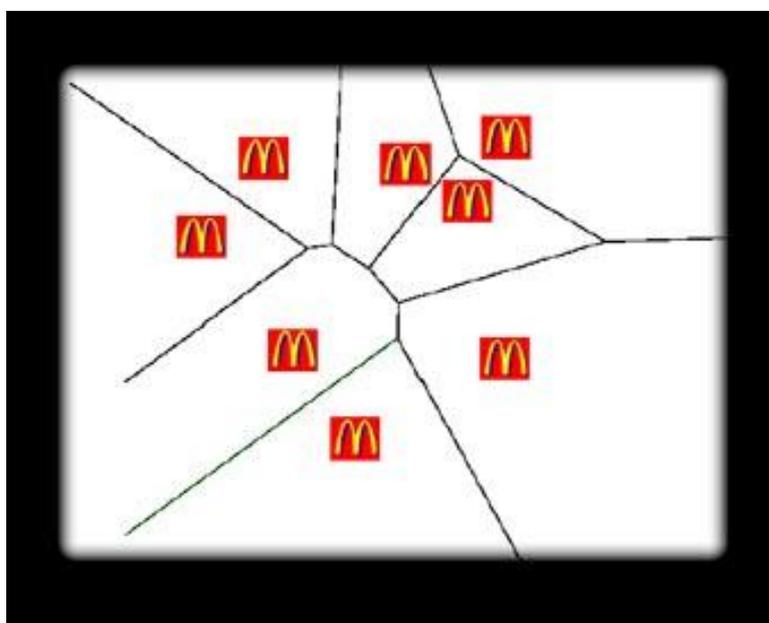
Segundo Okabe (2000), os diagramas de Voronoi podem ser aplicados a contextos que vão desde a determinação dos melhores pontos para aquisição de dados meteorológicos até escolha de pontos comerciais de redes de franquias (Fig.17).

No contexto específico de planejamento governamental, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos no decurso dos últimos anos utilizando esta ferramenta (REZENDE et al, 2000). Em especial, problemas relativos à análise de impacto e

riscos ambientais baseados na coleta e no monitoramento de sítios fixos são particularmente adequados de serem modelados por este sistema.

Considerando um problema em que um conjunto de pontos dispostos em uma região, pode-se dividir essa região em sub-regiões, de maneira que cada uma contenha um destes pontos e cuja união é uma partição da região original. Em cada região delimitada, um consumidor percorre o menor caminho a um estabelecimento da McDonald's, se escolher aquele único estabelecimento existente na sua própria região (Fig.17).

**Figura 17:** Diagrama de Voronoi e McDonald's



**Fonte:** <http://www.inf.ufsc.br/~patrec/intro.html>

Segundo Rezende (2000), o método dos Diagramas de Voronoi poderia ser mais explorado na área de planejamento em saúde.

O problema do par mais próximo é um exemplo de problema que quando olhado sobre uma abordagem não geométrica propõe-se soluções computacionalmente complexas. Este problema consiste em saber quais ou qual par de pontos é o que contem a menor distância entre eles, dado um conjunto finito de pontos  $P$ . Este problema, também chamado de “problema de todos os vizinhos mais próximos”, pode ser estendido para achar todos os pares de pontos mais próximos.

Uma abordagem puramente combinatorial resolveria o problema com um algoritmo custoso, onde a distância de  $pi$  seria medida em relação a cada um dos outros pontos.

Seguindo as propriedades dos diagramas de Voronoi, sabe-se que tal número de comparações não é necessário, faz-se necessário apenas as comparações entre os pontos cujas regiões de Voronoi são adjacentes (OKABE et al, 2000).

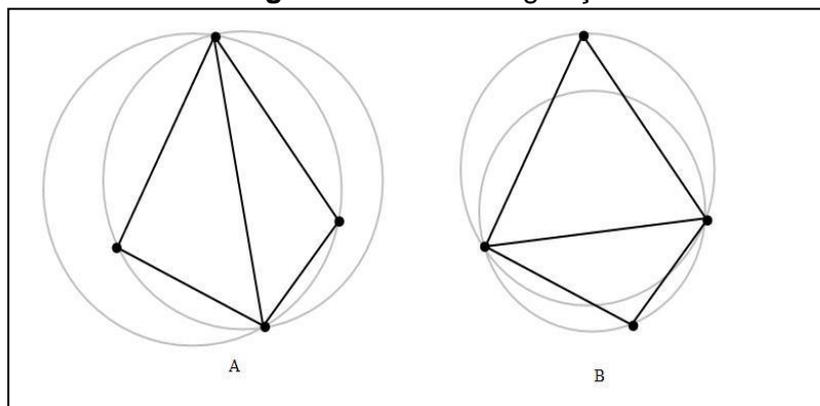
### **1.3.9 Triangulações de Delaunay**

#### **1.3.9.1 Definição das Triangulações de Delaunay**

Quando se tem um conjunto de pontos no plano e o diagrama de Voronoi é montado a partir dali, pode-se obter uma nova divisão se os pontos geradores, que deram origem ao diagrama de Voronoi forem ligados. Essa nova tecelagem tem o nome de triangulação. O problema é que nem sempre os polígonos resultantes dessas conexões são triângulos, o que pode causar um pouco de confusão. Esse tipo de tecelagem não gera apenas triângulos, pois o conjunto de pontos inicial pode gerar um caso degenerado, ou seja, há uma série de pontos co-circulares que farão um único vértice ter mais de três arestas.

Quando se trata de um caso degenerado, ainda assim é possível obter uma nova tecelagem, ou um novo grafo, a partir do diagrama de Voronoi, ou simplesmente do conjunto de pontos, mas o resultado não conterá apenas triângulos, diz-se neste caso que se trata de uma pré-triangulação (OKABE et al, 2000).

Após observar essa pré-triangulação, obtém-se a triangulação a partir da conexão de vértices dos polígonos resultantes de forma que essas diagonais não se cruzem e que formem maiores círculos vazios possíveis. Quando não se consegue um triângulo cujo círculo definido pelos seus vértices é vazio, ou seja, não há pontos geradores em seu interior, a diagonal sofre uma rotação de forma a obter a triangulação ótima.

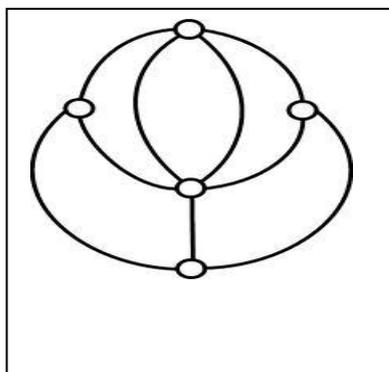
**Figura 18:** Duas triangulações.

**Fonte:** [http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay\\_triangulation](http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation).

Um exemplo onde existem duas triangulações (Fig. 18). A imagem 'A' contém um triângulo onde um dos vértices do polígono fica dentro do círculo definido pelos outros três vértices. A triangulação que se quer é obtida a partir da rotação da diagonal de forma que ela ligue os outros dois vértices, dessa forma obtém-se uma triangulação válida, ou seja, todos os círculos são vazios.

Neste primeiro momento, estuda-se como as triangulações de Delaunay podem ser derivadas a partir dos diagramas de Voronoi de uma maneira mais superficial para posteriormente ser estudada mais a fundo.

Na teoria dos grafos, chama-se de grafo planar um conjunto de nós (pontos) no plano, ligados por arcos (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007) (ou arestas) onde tais arestas não se cruzam.

**Figura 19:** Grafo planar simples.

**Fonte:** [http://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo\\_planar](http://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_planar).

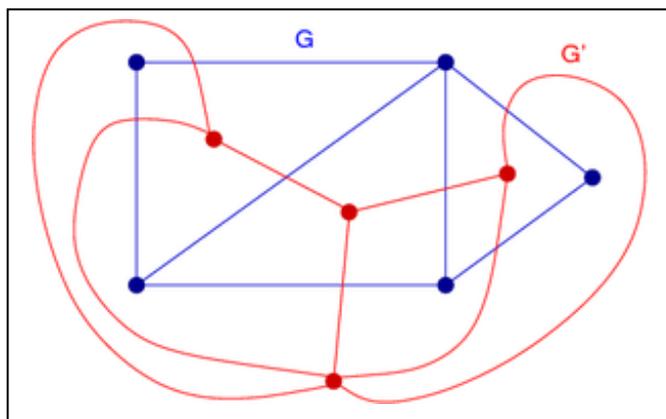
Segundo a definição, pode-se associar este conceito diretamente aos diagramas de Voronoi ordinários, ou seja, os diagramas sem pesos.

Os nós nesse caso passam a ser os próprios pontos geradores, já que cada ponto gerador do diagrama de Voronoi gera uma face (região).

Observa-se que esse grafo gerado a partir do diagrama possui um nó por região de Voronoi e dois nós dividem uma aresta apenas se as regiões de Voronoi forem adjacentes, ou seja, dividem uma aresta, ou borda. Com isso, haverá uma relação de um para um entre as faces geradas pelo grafo e os vértices contidos no diagrama de Voronoi (BERG et al, 2008).

Uma propriedade interessante dos grafos planares é que todo grafo planar possui um grafo dual, ou seja, para cada região, ou face, de um grafo planar, pode-se associar um nó que fará parte do conjunto de nós do grafo dual.

**Figura 20:** Grafo planar (G) e seu grafo dual (G').



**Fonte:** [http://en.wikipedia.org/wiki/Dual\\_graph](http://en.wikipedia.org/wiki/Dual_graph).

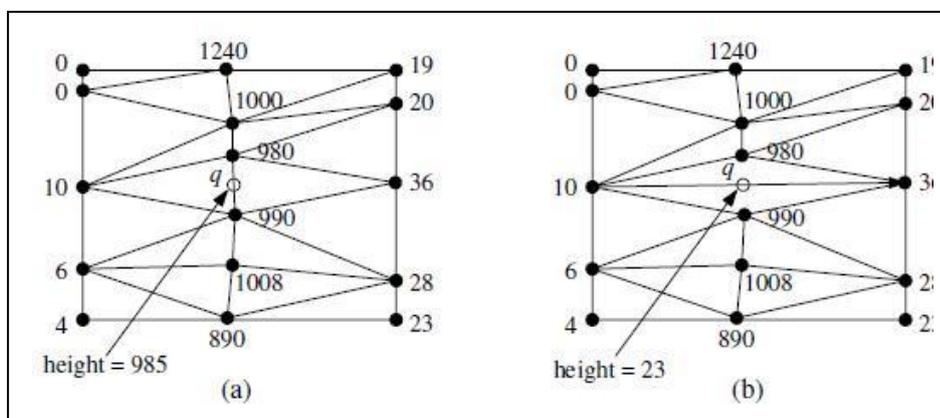
Assim, fala-se das triangulações de Delaunay como um grafo dual dos diagramas de Voronoi, pois uma triangulação de Delaunay pode ser facilmente obtida a partir de um diagrama de Voronoi.

O conceito de triangulação de Delaunay pode ser utilizado para fazer menção à cartografia e modelagem de terrenos (BERG et al, 2008).

Imaginando o trabalho de confeccionar um mapa de relevos onde para tal tarefa o indivíduo só possui alguns pontos com suas altitudes. Para relacionar esses

pontos de forma que as arestas que ligam esses pontos sejam o mais próximo do real tenta-se dar uma estimativa mais próxima possível para que o leitor do mapa tenha uma melhor ideia sobre o terreno o qual está a observar. Para o cartógrafo, tal tarefa parece impossível, porque ele só possui as altitudes dos pontos medidos, não há medidas para todos os pontos do mapa. Considerando uma triangulação como decomposição de um polígono em um conjunto de triângulos, onde o conjunto de diagonais é máximo e elas não se intersectam (BERG et al, 2008) e um conjunto de polígonos no plano (os vértices seriam os pontos onde a altitude foi medida), pode-se montar uma triangulação de forma que outros pontos possam ser inferidos de uma forma mais precisa e que pareçam mais naturais. Na Fig.21, os pontos pretos indicam onde a altitude foi medida e o ponto branco deve ser inferido. Sendo uma cordilheira, onde traço central é a espinha da cadeia de montanhas, a triangulação da esquerda propõe um modelo mais fiel quando comparada à da direita.

**Figura 21:** Demonstração de dois tipos de triangulações onde a primeira (a) é vista de forma mais natural quando se pensa em uma cadeia de montanhas, ou cordilheira.



Fonte: BERG, 2008.

### 1.3.9.2 Propriedades das Triangulações de Delaunay

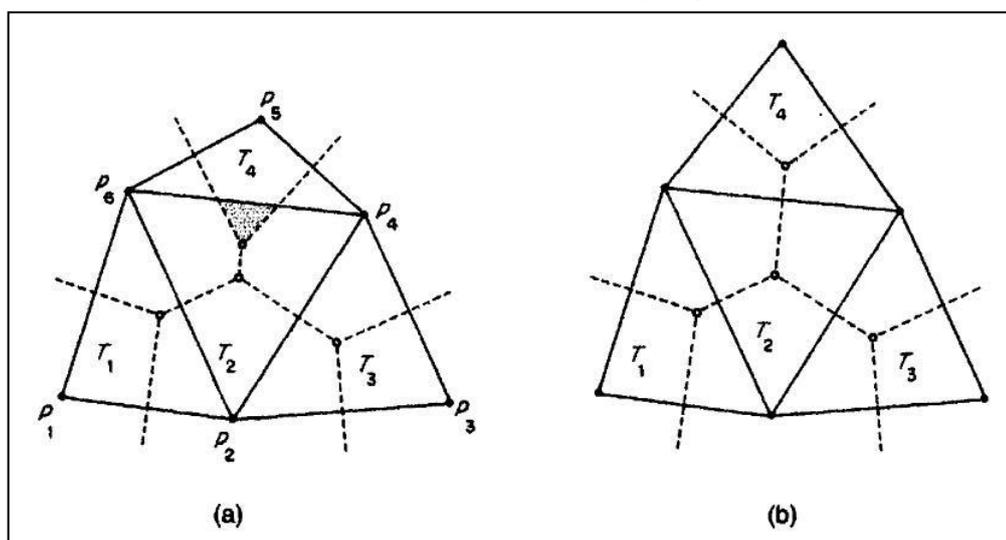
Um grafo de Delaunay de um conjunto de pontos no plano é sempre planar. Como não há cruzamentos, abre-se uma gama de aplicações, por exemplo, sistemas de irrigação. Pode-se imaginar que num vasto campo árido pretende-se adotar um sistema de irrigação, a melhor maneira de prover água suficiente para

toda área com a menor quantidade de tubulação possível pode ser implantada com o auxílio da triangulação.

Outra propriedade lembra sobre a relação de um para um entre o número de faces no grafo formado pela triangulação de Delaunay e o número de vértices no diagrama de Voronoi do qual a triangulação foi gerada. Mais precisamente, se um vértice do diagrama de Voronoi ( $Vor(P)$ ) é um vértice das regiões de Voronoi para  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ , então a face correspondente na triangulação terá  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  como seus vértices (BERG et al, 2008).

A terceira, e talvez a mais útil, em relação às triangulações, é que as arestas mais externas do grafo gerado pela triangulação são os limites do conjunto de pontos geradores do diagrama de Voronoi, ou seja, é o próprio fecho convexo do conjunto de pontos.

**Figura 22:** Triangulações de Delaunay: na esquerda tem-se uma triangulação qualquer, enquanto na direita tem-se uma triangulação Pitteway.



Fonte: OKABE, 2000.

Quando se fala de triangulações, há uma diferença que dá origem a outra propriedade. Na Fig. 22 tem-se a triangulação que dá origem aos triângulos  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$ . Onde, pode ser observado que num triângulo como  $T_1$ , qualquer ponto escolhido no interior desse triângulo terá um de seus vértices como vizinho mais próximo, ou seja, os pontos geradores mais próximos de qualquer ponto no interior

desse triângulo são seus vértices. Mas isso não é verdade para qualquer tipo de triângulo. No caso de  $T_2$ , isso não é verdade. É observado que para a área cinza, o ponto gerador mais próximo será o  $p_5$ , vértice de  $T_4$ .

Triangulações que possuem apenas triângulos do primeiro tipo, ou seja, triângulos cujo um ponto qualquer em seu interior tenha o ponto gerador mais próximo como um de seus vértices é chamada de triangulação Pitteway (OKABE et al, 2000). Esse nome foi dado devido aos estudos realizados por Michael Pitteway em 1973.

Desse tipo de triangulação pode-se derivar a seguinte propriedade: (teorema da triangulação Pitteway) uma triangulação de Delaunay  $D(P)$  é uma triangulação Pitteway  $Pit(P)$ , se e somente se todo arco do grafo da triangulação cruzar a aresta correspondente no diagrama de Voronoi  $Vor(P)$  gerado pelo conjunto de pontos  $P$  (OKABE et al, 2000).

Um circuncírculo, em geometria, é um círculo cuja circunferência está sobre os vértices de um polígono. Então, nas triangulações de Delaunay todos circuncírculos são vazios. Mais ainda, se em qualquer triangulação derivada de um conjunto de pontos  $P$  satisfaz a condição do círculo vazio, ou seja, o circuncírculo gerado por um triângulo não contém pontos geradores em seu interior, tal triangulação é obrigatoriamente uma triangulação de Delaunay.

### 1.3.9.3 Aplicações das Triangulações de Delaunay

Há várias formas de se aplicar as triangulações de Delaunay, como, por exemplo, em confecção de mapas de relevo, ou como são chamados em computação gráfica, terrain (terreno). Rippa (1990) comprova que a triangulação de Delaunay minimiza as diferenças de relevo nos terrenos.

Outra aplicação desse tipo de triangulação está presente na interpolação entre imagens tomográficas, método utilizado para gerar imagens intermediárias a partir de duas imagens originais. Outros métodos usando as triangulações de Delaunay para a interpolação das imagens foram propostos e mostraram resultados bastante promissores (PRADO; TRAINA, 1996).

Um problema matemático onde a aplicação de uma triangulação de Delaunay é bastante útil é o problema do vizinho mais próximo com uma distância fixa. O problema consiste em dado um conjunto finito de pontos no plano e dada uma distância fixa  $d$ , achar todos os pares de pontos  $p_i$  e  $p_j$  onde  $\|x_i - x_j\| \leq d$ . Para a resolução deste problema deve-se primeiro produzir a triangulação de Delaunay. Segundo, apenas as aresta do grafo resultante que obedecem a regra da distância, são escolhidas, ou seja, obedecem a  $\|x_i - x_j\| \leq d$ . As arestas escolhidas formam o grafo  $G(P_g, L_g)$  onde  $P_g$  é o conjunto de pontos no final das arestas escolhidas e  $L_g$  é o conjunto de arestas não finalizadas escolhidas. Terceiro, para cada ponto em  $P_g$ , faz-se uma procura em profundidade em  $G(P_g, L_g)$  parando em cada ramo da pesquisa no primeiro ponto  $p_k$  onde  $\|x_i - x_k\| \leq d$  e reporta-se todos os pares  $(p_i, p_k)$  onde  $\|x_i - x_k\| \leq d$  (OKABE et al, 2000).

### 1.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALMEIDA, C. S. A. D. **Plano de mobilidade no contexto da melhoria da qualidade do ar em Lisboa**. 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia do Ambiente) – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 2010.
2. AURENHAMMER, F.; KLEIN, R. Voronoi Diagrams. In: ED, J.; SACK, R.; URRUTIA, J. **Handbook of Computational Geometry**. Amsterdam, Netherlands: North-Holland p. 201-290. Ch. 5. 2000.
3. BAKONYI, S. M. C.; et al. Poluição atmosférica e doenças respiratórias em crianças na cidade de Curitiba. **Rev. Saúde Pública**, Curitiba, v. 38, n. 5, p. 695-700, 2003.
4. BERG, M. de.; et al. **Computational Geometry**. 3. ed. BerlinHeidelberg: Springer-Verlag, 2008.
5. BRAIT, C. H. H.; ANTONIOSI FILHO, N. R. Desenvolvimento e aplicação de sistema passivo de coleta de poluentes atmosféricos para monitoramento de Cd, Cr, Pb, Cu, Fe, Mn, Zn e particulados totais. **Quím. Nova**, São Paulo, v. 33, n. 1, 2010.
6. BRANCO, S. M. **Poluição do ar**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 1995.
7. CASTRO, H. A. de.; et al. Effect of air pollution on lung function in schoolchildren in Rio de Janeiro, Brazil. **Rev. Saúde Pública**, São Paulo, v. 43, n. 1, Feb. 2009.
8. COLOMBINI, M. P. **Poluição atmosférica e seu impacto no sistema cardiovascular**. *Epidemiol. Serv. Saúde*. v. 6, n. 2, 2008.
9. CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE - CONAMA. 1990. **Resolução Conama nº 003**. Disponível em:< <http://www.mma.gov.br/port/conama/res/res90/res0390.html> >. Acesso em 10/08/2010.
10. COSTA, M. A. P. M.; et al. Efeitos das partículas totais em suspensão (PTS) na saúde da população dos bairros de Benfica, Bonsucesso, Ramos e Manguinhos – Rio de Janeiro/RJ. **HYGEIA – Revista Brasileira de Geografia Médica e da Saúde**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 9, p. 99-114, dez. 2009.

11. COUTO, A.; et al. Análise Qualitativa do Material Particulado Suspenso no Ar da Região Metropolitana do Recife. In: **30ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Química**, Águas de Lindóia, SP, mai. 2007.
12. DALES, R. E.; CAKMAK, S.; VIDAL, C. B. Air pollution and hospitalization for headache in Chile. **Am. Journal of Epidemiology**, v. 170, n. 8, p. 1057-1066, 2009.
13. DANNI-OLIVEIRA, I. M. Considerações sobre a poluição do ar em Curitiba-PR face a seus aspectos de urbanização. **R.RA'EGA**, Curitiba, n. 4, 2000.
14. EDWARDS, C. A. Assessing the effects of environmental pollutants on soil organisms, communities, processes and ecosystems. **European Journal of Soil Biology**, Ohio, v. 38, p. 225-231, 2002.
15. FAVERO, J. L.; MUNIZ, A. R.; SANTOS, R. P. B. dos. Análise teórico-experimental da dispersão de poluentes líquidos em solos. **Engenharia Sanitária e Ambiental**, Rio Grande do Sul, v. 12, n. 4, p. 410-416, out./dez. 2007.
16. FERNANDES, J.; et al. Poluição atmosférica e efeitos respiratórios, cardiovasculares e reprodutivos na saúde humana - Air Pollution and its respiratory, cardiovascular and reproductive effects in the human health. **Revista Médica de Minas Gerais - RMMG**, Minas Gerais, v. 20, n. 1, 2010.
17. GIODA, A.; GIODA, F. R. A Influência da qualidade do ar nas doenças respiratórias. **Revista Saúde e Ambiente**, Joinville, v. 7, n. 1, jun. 2006.
18. GOUVEIA, N.; et al. Poluição do ar e efeitos na saúde nas populações de duas grandes metrópoles brasileiras. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, São Paulo, 2003, v. 12, n. 1, p. 29-40.
19. HESS, S. C.; et al. Distribuição espacial da mortalidade por doenças do aparelho respiratório no Brasil. **Engenharia Ambiental**, Espírito Santo do Pinhal, v. 6, p. 607 - 624, 2009.
20. IGNOTTI, E.; et al. Impact on human health of particulate matter emitted from burnings in the Brazilian Amazon region. **Revista de Saúde Pública**, São Paulo, v. 44, n. 1, Feb. 2010 .
21. LICCO, E. A. Avaliação de risco como ferramenta complementar ao licenciamento de fontes de poluição envolvendo poluentes tóxicos do ar. **INTERFACEHS: revista de gestão integrada em saúde do trabalho e meio ambiente**, [s.l.], v. 3, n.1, jan./ abr. 2008.

22. MARTINS, L. C.; et al. Poluição atmosférica e atendimentos por pneumonia e gripe em São Paulo, Brasil. **Revista de Saúde Pública**, São Paulo, v. 36, n. 1, p. 88-94, 2002.
23. McHUGH, C.A.; CARRUTHERS, D. J.; EDMUNDS, H. A. ADMS-Urban: an air quality management system for traffic, domestic and industrial pollution. **International Journal of Environment and Pollution**, [s.l.], n. 8, p. 437-440, 1997.
24. MOREIRA, D. M.; TIRABASSI, T. Modelo matemático de dispersão de poluentes na atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental. **Ambiente & Sociedade**, Campinas, v. 7, n. 2, Dec. 2004.
25. MOREIRA, D. M.; TIRABASSI, T.; MORAES, M. R. de. Meteorologia e poluição atmosférica. **Ambiente & Sociedade**, Campinas, v. 11, n. 1, jun. 2008.
26. NOGUEIRA, J. B. Poluição atmosférica e doenças cardiovasculares. **Revista Portuguesa Cardiológica**, Lisboa, v. 28, n. 6, p. 715-733, 2009.
27. OKABE, A.; et al. **Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams**. 2. ed. New York: Wiley, 2000.
28. REZENDE, F. A. V. S.; ALMEIDA, R. M. V.; NOBRE, F. F. Diagramas de Voronoi para a definição de áreas de abrangência de hospitais públicos no Município do Rio de Janeiro. **Caderno de Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v.16, n. 2, abr./Jun. 2000.
29. RIBEIRO, H.; PESQUERO, C. Queimadas de cana-de-açúcar: Avaliação de efeitos na qualidade do ar e na saúde respiratória de crianças. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 24, n. 68, 2010.
30. RIPPA, S. Minimal Roughness Property of the Delaunay Triangulation. **Computer Aided Geometric Design**, [s.l.], 7:489-497, 1990.
31. ROSEIRO, M. N. V. **Poluentes atmosféricos: algumas consequências respiratórias na saúde humana**. São Paulo: UNAERP, 2003.
32. SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
33. SILVA, A. M. C. da. et al. Particulate matter (PM<sub>2.5</sub>) of biomass burning emissions and respiratory diseases in the south of the Brazilian Amazon. **Revista Brasileira Epidemiologia**, São Paulo, v. 13, n. 2, Jun. 2010.

34. TORRES, F. T. P.; MARTINS, L. A. Determinação dos fatores que influenciam na concentração do material particulado inalável na cidade de Juiz de Fora – MG. **Revista Eletrônica do Curso de Geografia do Campus Avançado de Jataí – GO**, Goiás, n. 5, jul./dez. 2005.
35. VERDADE, V. K.; DIXO, M.; CURCIO, F. F. Os riscos de extinção de sapos, rãs e pererecas em decorrência das alterações ambientais. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 24, n. 68, 2010.
36. WORLD HEALTH ORGANIZATION. **Air quality guidelines for particulate matter, ozone, nitrogen dioxide e sulfur dioxide**. [s. l.]: Global Update, 2005.
37. YU, C. M. **Sequestro florestal de carbono no Brasil**: dimensões políticas, socioeconômicas e ecológicas. 2004. 279 f. Tese (Doutorado em Meio Ambiente e Desenvolvimento) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2004.
38. Departamento Estadual de Trânsito de Pernambuco. **Estatísticas**: estatísticas atuais. <http://www.detran.pe.gov.br>. Acessado em: 31/08/2011.
39. Distributed Control of Robotic Networks. **Projeto**. <http://tintoretto.ucsd.edu/andrew/voronoi.html>. Acessado em: 31/08/2011.
40. Wikipédia. **A enciclopédia livre**. [http://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo\\_planar](http://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_planar). Acessado em: 02/09/2011.

# Capítulo II

# Uso de Diagramas de Voronoi Valorados na Determinação do Zoneamento de Risco Associado à Presença de Poluentes Atmosféricos

A. S. S. BEZERRA, E. A. O. LIMA, S. M. M. FERNANDES, UNICAP - Universidade Católica de Pernambuco, Mestrado em Desenvolvimento de Processos Ambientais, 50050-900 Recife, PE, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho apresentaremos um *software* para criação de Diagramas de Voronoi Valorados que será utilizado como uma ferramenta para auxiliar na delimitação da área de atuação de pontos de controle da poluição atmosférica de uma determinada região. Os Diagramas de Voronoi serão utilizados para determinar a área de abrangência sob a ação dos sensores da poluição atmosférica, colocados em pontos estratégicos do bairro da Ilha do Leite, também conhecido como o pólo médico do Recife – Pernambuco. A determinação estratégica para colocação dos sensores deverá levar em conta o volume de veículos que circulam na área escolhida como sendo o ponto de liberação da poluição, a quantidade de leitos hospitalares afetados pelos poluentes e pela distância dos leitos em relação às fontes de poluição. Com o estudo desses valores serão observados alguns problemas e propostas algumas possíveis soluções.

**Palavras-chave.** Diagramas de Voronoi Valorados, Poluentes Atmosféricos, Análise de Risco.

## 2.1 Introdução

A poluição atmosférica tem sido uma preocupação constante nos países devido aos problemas causados à saúde e ao meio ambiente. Provavelmente, uma das principais preocupações da saúde pública [1].

O comprometimento da qualidade do ar já foi atribuído ao intenso crescimento da população nas cidades [2]. Como também, estudos afirmaram que esses problemas tinham a tendência de piorar devido ao aumento da emissão de  $CO_2$ , propiciado pelo aumento do tráfego [3]. Este fato também deve ser atribuído ao aumento do poder aquisitivo, que facilita a compra de bens como automóveis, aliado à falta de manutenção dos mesmos, algo que pode ser observado até nas regiões interioranas, onde o meio de transporte predominante era o de tração animal, e atualmente houve a substituição de grande parte desse meio de transporte por motocicletas e carros.

Entre as substâncias mais preocupantes estão o dióxido de enxofre ( $SO_2$ ), que na presença da radiação solar pode ser ativado e dando origem ao trióxido de enxofre ( $SO_3$ ), e se essa substância estiver em ambiente úmido pode se unir à água ( $H_2O$ ) e formando o ácido sulfúrico ( $H_2SO_4$ , altamente corrosivo e tóxico. O gás carbônico ( $CO_2$ ) que é formado com o resultado da combustão, mas não é uma substância tóxica, porém é um dos componentes responsável pelo efeito estufa, e quando o oxigênio não é suficiente para que se tenha uma combustão completa, o resultado será o monóxido de carbono ( $CO$ ), que é considerado um dos gases mais tóxicos e perigosos para o ser humano. Já o

material particulado (MP) pode possuir diversas substâncias inaláveis e absorvíveis pelo organismo do ser humano, causando diversos problemas respiratórios, circulatórios, etc.

Essa qualidade do ar comprometida tem causado vários problemas de saúde nos grandes centros urbanos, o que vem onerando o sistema de saúde, principalmente público. Independentemente dos causadores, os governos socialmente comprometidos estão se movendo em busca de soluções que possam mitigar esse tipo de problema, utilizando o monitoramento da qualidade do ar.

O monitoramento da qualidade do ar tem como objetivo verificar se determinada área esta sofrendo a ação da poluição atmosférica e em que proporções, com base em padrões regulamentados pelos órgãos competentes como WHO – *World Health Organization* e CONAMA – Conselho Nacional do Meio Ambiente. Onde, esse monitoramento geralmente é realizado através de sensores, dispostos em locais estratégicos, mas sem determinação da área de abrangência de cada um dos sensores.

A técnica da utilização dos diagramas de Voronoi vai proporcionar a determinação dessa área de abrangência dos sensores, uma vez que os diagramas de Voronoi permitem a subdivisão das regiões em um conjunto de áreas de abrangência, visando estabelecer relações de proximidade entre os pontos [4].

## 2.2 Definições

Nesta seção serão apresentadas algumas definições para um melhor entendimento do trabalho.

- A poluição atmosférica e seus problemas

Existência de substâncias na atmosfera em quantidade suficientemente elevada com relação aos níveis considerados normais, ou que tenham sido modificadas em sua composição ou propriedade, e que possam causar algum desconforto ou risco à saúde humana, meio ambiente ou outros materiais. Dentre os principais problemas relacionados a essas substâncias, podem ser destacadas as doenças pneumológicas, circulatórias e até oncológicas.

- Diagramas de Voronoi

Técnica que permite a subdivisão de uma região geométrica em um conjunto de áreas de abrangência, levando em consideração a teoria da distância euclidiana para determinar a fronteira de cada região.

- Risco

Pode ser considerado como a possibilidade de um resultado adverso e a incerteza sobre o tempo de ocorrência, ou a magnitude desse resultado. Onde, se qualquer um dos atributos não existir, então

não haverá risco. Pode-se ainda definir o risco como uma característica de uma situação ou ação onde dois ou mais resultados são possíveis, sendo que, um resultado é desconhecido e outro é uma situação indesejada. Em termos matemáticos o risco pode ser definido como  $R = P(O) \times C$ , onde,  $P(O)$  é a probabilidade de ocorrência e o  $C$  é a consequência ou vulnerabilidade.

- Avaliação de Risco

Pode ser definida como um processo sistemático para gerar uma distribuição de probabilidade ou quantificação similar que descreve a incerteza sobre a magnitude de tempo, a natureza da saúde ou possíveis consequências ambientais associadas com a possível exposição a substâncias específicas, processos, ações ou eventos.

- *Applet*

*Software* aplicativo que é executado no contexto de outro programa, como por exemplo, uma página *web*. Uma *applet* geralmente executa funções bem específicas e não pode executar sozinha.

## 2.3 Materiais e Métodos

Inicialmente foi escolhido o diagrama de Voronoi do tipo valorado, onde cada ponto gerador está diretamente relacionado a um peso específico, que vai ser responsável de ajustar a dimensão da área de abrangência de cada um desses pontos.

O código-fonte inicial para a execução dos diagramas de Voronoi valorados foi adquirido em uma página web [5] (figura 23), onde, ao acessar essa página, um *applet* é executado, gerando e exibido um Diagrama de Voronoi Valorado (DVV), com quantidade de pontos e seus respectivos pesos de forma aleatória.

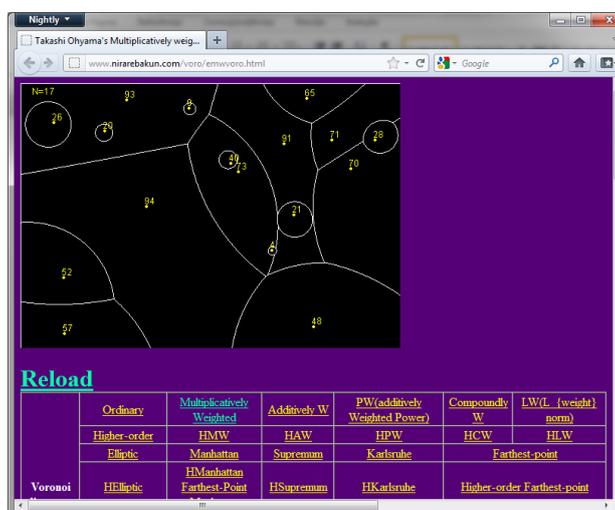


Figura 23: página de origem do código-fonte

Analisando o código-fonte foi verificada a passagem de três parâmetros, pela página HTML, para a execução desse *applet* (figura 24). Esses parâmetros são a largura e o comprimento da janela que apresenta o DVV, como também um valor fixo para ser processado com uma função randômica gerando a quantidade aleatória de pontos do diagrama de Voronoi.

```

34 public double randmw(){
35     double rand1mw;
36     rand1mw=Math.random();
37     return rand1mw;
38 }
39 public void init(){
40     col1=Color.black;
41     col2=Color.yellow;
42     col3=Color.white;
43     takaS=getParameter("takap");//get height of screen from HTML file
44     habaS=getParameter("habap");//get width of screen from HTML file
45     NS=getParameter("Np");//get number of generators from HTML file

```

**Figura 24:** trecho do código-fonte original.

Foram feitas algumas alterações nesse código-fonte, de maneira que esse *applet* funcionasse como um aplicativo comum e com o tamanho da janela de apresentação fixo. Nessa adequação foi inserido no código um tamanho padrão para a janela, de forma que essa ficasse bem visível e foi inserida uma função para solicitar ao usuário a quantidade de pontos a ser inserida na área estudada (figura 25). Concluída essa alteração o aplicativo estava pronto para ser utilizado como ferramenta no propósito do estudo.

```

50
51     //tamanho da janela
52
53     takaS="500";//get height of screen from HTML file
54     habaS="500";//get width of screen from HTML file
55     NS = JOptionPane.showInputDialog("Digite a quantidade de sensores:");
56

```

**Figura 25:** trecho do código-fonte com alterações realizadas pelo autor.

A idéia do trabalho é gerar e exibir esse DVV delimitando a área de abrangência dos sensores da poluição atmosférica, tendo como geradores desses diagramas os próprios sensores representados por pontos. Com isso, surgiu a necessidade de controle da localização, quantidade e representatividade (peso) desses pontos.

Como esses pontos devem representar a localização dos sensores com a máxima fidelidade, faz-se necessária a entrada da quantidade, localização e peso de cada um desses pontos, pelo usuário do aplicativo. Levando em consideração um quantitativo fixo de sensores e a possibilidade de estudar outra área com dimensões menores ou maiores, onde haveria o ajuste na quantidade, com a retirada ou inserção de pontos de acordo com cada área. Assim, foram feitas algumas alterações no código (figura 26), pois anteriormente esses valores eram gerados de forma aleatória e com essas

alterações, o próprio usuário passou a ter o controle desses pontos, com relação à quantidade de pontos, localização e peso de cada um.

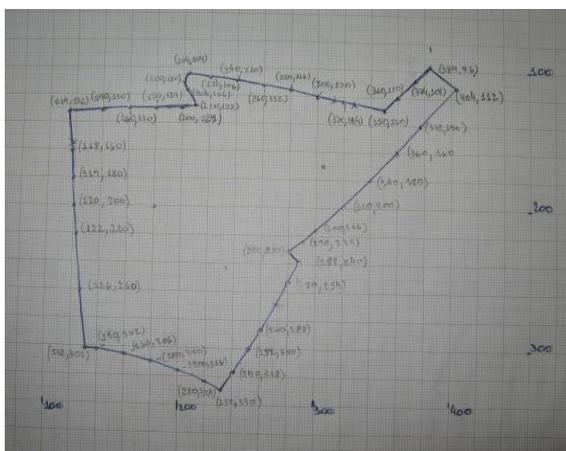
```

170 // Solicitando a localização dos sensores como também seu peso correspondente
171
172 // Valor de X do ponto
173 ValorX = Integer.parseInt(JOptionPane.showInputDialog("Digite X:"));
174 x1mw[kmw]=ValorX;//x coordinate
175
176 // Valor de Y do ponto
177 ValorY = Integer.parseInt(JOptionPane.showInputDialog("Digite Y:"));
178 y1mw[kmw]=ValorY;//y coordinate
179
180 // Peso do ponto
181 Peso = Integer.parseInt(JOptionPane.showInputDialog("Digite o Peso:"));
182 w1mw[kmw]=Peso;//weight

```

**Figura 26:** trecho do código-fonte com alterações realizadas pelo autor.

Somente a inserção dos pontos, em um espaço qualquer não teria o menor sentido. Contudo, esse contexto ganharia um sentido com a inserção desses pontos que representam os sensores sobre a área monitorada. Então, foi realizado manualmente, o georeferenciamento da imagem do mapa, em papel milimetrado (figura 27), com o objetivo de adquirir o conjunto dos pontos (x,y) que formaram o polígono representativo da área monitorada.



**Figura 27:** Georeferenciamento manual da área a ser estudada.

Em seguida esse conjunto de pontos foi inserido no código-fonte (figura 28), para ser utilizado como parâmetro na função *drawPollygon* (figura 29) exibindo um polígono (figura 30) na forma da área estudada que graficamente já era suficiente para análise. Contudo, se houvesse alteração da área, teria que ser realizado um novo georeferenciamento para obtenção dos novos pontos representativos, o que seria custoso e trabalhoso.

```

128 // Montando o polígono da área a ser estudada
129 // Os valores de X
130 int xpoints [] = {384, 374, 360, 350, 320, 300, 280, 260, 240, 220, 204, 200, 204, 210, 200,
131                  180, 160, 140, 114, 118, 119, 120, 122, 126, 132, 140, 160, 180, 200, 220,
132                  232, 240, 252, 260, 280, 288, 280, 290, 300, 320, 340, 360, 378, 404};
133
134 // Os valores de Y
135 int ypoints [] = {96, 108, 120, 130, 124, 120, 116, 112, 110, 106, 104, 110, 116, 128, 129,
136                  129, 130, 130, 132, 160, 180, 200, 220, 260, 302, 302, 306, 310, 316, 324,
137                  330, 318, 300, 288, 254, 240, 230, 224, 216, 200, 180, 160, 140, 112};
138
139 // A quantidade de pontos que formarão o polígono
140 int npoints = 44;
141

```

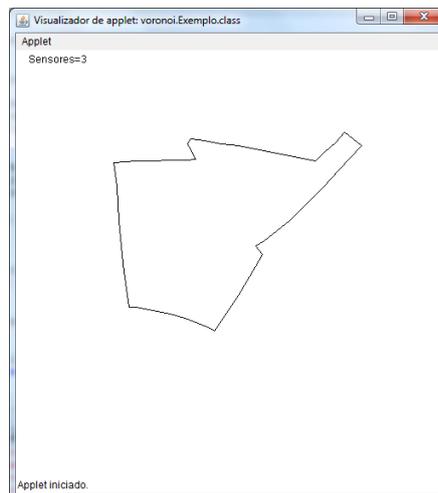
**Figura 28:** Inserção dos pontos resultantes do georeferenciamento manual.

```

146 // Desenhando um retângulo que será o plano de fundo da janela
147 // Selecionar a cor do retângulo
148 g.setColor(col1);
149
150 // Selecionar o tamanho do retângulo
151 setSize(500,500);
152
153 // Plotar o retângulo
154 g.fillRect(0,0,habamw,takamw);
155
156 // Selecionar a cor do contorno do polígono da área estudada
157 g.setColor(col2);
158
159 // Desenhar o polígono com os pontos fornecidos anteriormente
160 g.drawPolygon (xpoints, ypoints, npoints);

```

**Figura 29:** Inserção e utilização da função *drawPolygon*.



**Figura 30:** Resultado da execução do *applet* com as alterações.

Procurando a obtenção de uma solução para o problema de aquisição dos pontos, foram retiradas as linhas que representam o conjunto dos pontos dessa área e a função *drawPolygon* (figura 28 e figura 29), sendo substituídas por outras linhas (figura 31 e figura 32), que após a



Por se tratar de Diagramas de Voronoi Valorados (DVV), surgiu a necessidade de aquisição de pesos que representariam o percentual de carga de poluentes em cada região dos diagramas. Assim, chegou-se até a fórmula  $P = \frac{F}{\sum F} \times 100$ , onde  $P$  seria o resultado do peso proposto para cada ponto gerador do DVV, e  $F$  o fator relativo aos poluentes. Para o cálculo desse fator relativo aos poluentes atmosféricos foi determinada  $F = \frac{Qp \times Qf}{D}$ , sendo  $Qp$  a representação da quantidade de pessoas expostas aos poluentes naquele ponto,  $Qf$  a quantidade aproximada de agentes poluentes que estão ou passam pelo ponto de liberação de poluentes e  $D$  como sendo a distância aproximada, compreendida entre o ponto gerador do DVV (local do sensor de poluição atmosférica) e o local da liberação dos poluentes.

Para efeito de simulação foi escolhido o bairro da Ilha do Leite, por se tratar de um pólo médico localizado próximo a algumas vias de tráfego intenso, em que várias pessoas podem estar propícias a piorarem o estado clínico ou adquirirem uma nova enfermidade. Também foi considerado: O Complexo Hospitalar Hope – Esperança, o Centro Hospitalar Albert Sabin e o Hospital Unimed Recife II, como representação da localização dos sensores, e a quantidade de leitos de cada hospital registrada no CNES (Cadastro Nacional de Estabelecimentos de Saúde) [6], como a quantidade de pessoas expostas aos poluentes; Ausência de vento e chuva; Avenida Agamenon Magalhães como o ponto de liberação dos poluentes; Veículos como agentes poluidores, sendo a quantidade de veículos aproximada indicada segundo CTTU (Companhia de Trânsito e Transporte Urbano do Recife) [7] e a distâncias entre os pontos estudados calculadas com o auxílio da ferramenta de medição de distância do *Google Maps* [8], conforme Tab.4.

**Tabela 4.** Dados relevantes para realização da simulação.

Sensor	Nome do Hospital	Qtd Leitos	Qtd Veículos	Distância	Fator	Peso
1	Comp. Hospitalar Hope - Esperança	154	60000	99,7	92678,0	63
2	Centro Hospitalar Albert Sabin	115	60000	189,9	36334,9	25
3	Hospital Unimed Recife II	78	60000	256,7	18231,4	12
$\Sigma$					147244,3	100

## 2.4 Resultados

Relacionando a tabela de valores a serem utilizados para a simulação com os termos das fórmulas

$F = \frac{Qp \times Qf}{D}$  e  $P = \frac{F}{\sum F} \times 100$ , temos:

**Tabela 5.** Relação entre os dados relevantes e os termos da simulação.

Sensor	Nome do Hospital	$Qp$	$Qf$	$D$	$F$	$P$
1	Comp. Hospitalar Hope - Esperança	154	60000	99,7	92678,0	63
2	Centro Hospitalar Albert Sabin	115	60000	189,9	36334,9	25
3	Hospital Unimed Recife II	78	60000	256,7	18231,4	12
$\Sigma$					147244,3	100



trabalho. Como também, observou-se a possibilidade de utilização dessa *applet* diretamente na internet em conjunto com o com o *Google Maps*, após alguns ajustes no código-fonte.

Com relação à análise de risco, nota-se que uma maior atenção deve ser destinada ao monitoramento da poluição atmosférica do Recife e Região Metropolitana, tendo em vista o aumento do tráfego nessas regiões e conseqüentemente o aumento da poluição atmosférica. Pois, atualmente pode ser observado que houve um aumento significativo de pessoas com problemas respiratórios e circulatórios, que pode ter uma relação direta com esse aumento da poluição.

Como sugestões para a mitigação desses problemas, poderiam ser estudadas algumas alternativas como:

Possibilidade de transferência desse pólo médico para uma área mais arborizada, onde não haveria a influência do intenso tráfego de uma metrópole;

O desvio desse tráfego para um local mais distante do pólo médico;

Utilização de combustíveis menos poluentes como o GNV – Gás Natural Veicular e Etanol. Como também, aumento do percentual de Biodiesel, o qual iria ser benéfico para outras regiões.

### Referências Bibliográficas

- [1] HABERMANN, M.; MEDEIROS, A. P. P.; GOUVEIA, N. Motor vehicle traffic as an air pollution exposure assessment method in big cities. **Revista Brasileira de Epidemiologia**, São Paulo, v. 14, n.1, Mar. 2011.
- [2] DANNI-OLIVEIRA, I. M. Considerações sobre a poluição do ar em Curitiba-PR face a seus aspectos de urbanização. **R. RA'EGA**, Curitiba, n. 4, 2000.
- [3] ALMEIDA, C. S. A. D. **Plano de mobilidade no contexto da melhoria da qualidade do ar em Lisboa**. 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia do Ambiente) – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 2010.
- [4] CARNASCIALI, A. M. dos S.; DELAZARI, L. S.; DOS SANTOS, D. R. Determinação de áreas de abrangência de agência bancária pelo diagrama de voronoi com obstáculos. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, 17, jul. 2011.
- [5] OHYAMA, T. **Código fonte: diagramas de Voronoi valorados**. <http://www.nirarebakun.com/voro/emwvoro.html>. Acessado em 01/11/2011.
- [6] MINISTÉRIO DA SAÚDE. **CNES: leitos**. <http://cnes.datasus.gov.br>. Acessado em 04/11/2011.
- [7] PREFEITURA DO RECIFE. **Trânsito do Recife: um panorama**. [http://www.recife.pe.gov.br/pr/servicospublicos/cttu/municipalizacao\\_transito.php](http://www.recife.pe.gov.br/pr/servicospublicos/cttu/municipalizacao_transito.php). Acessado em 04/11/2011.
- [8] GOOGLE MAPS. **Ferramenta de medição de distância**. <http://maps.google.com.br>. Acessado em 01/11/2011.